PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1916. Redaktionsschluß für No. 15 am 22. Juli 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

Ernst Dorn. Von A. Wigand. S. 297.

Originalmitteilungen:

A. March, Zur kinetischen Theorie der Verdampfung. S. 299.

K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen. S. 302.

W. Voigt, Flüssige Kristalle und anisotrope Flüssigkeiten. (Nachtrag.) S. 305.

W. Voigt, Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle. II. Einfluß der Absolutwerte der dielektrischen Momente auf die beobachtbaren Erscheinungen. S. 307.

P. S. Epstein, Über den lichtelektrischen Effekt und die β-Strahlung radioaktiver Substanzen. S. 313.

E. G. Taylor, Erklärung der Erscheinungen beim Passieren von Röntgenstrahlen an einem Bleirand. S. 316.

M. Siegbahn u. W. Stenström, Die Röntgenspektren der Elemente *Na* bis *Cr*. S. 318.

C. Benedicks, Über Wollastondraht. S. 319.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

W. Ostwald, Neue Forschungen zur Farbenlehre. I. S. 322.

Besprechungen:

H. R. G. Opitz, Über das erste Problem der Dioptrik. II. S. 332.

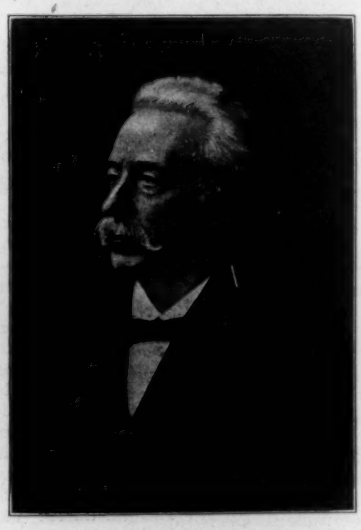
F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels. I. S. 332.

Personalien. S. 332.

Ernst Dorn.

Von Albert Wigand.

Im Alter von nicht ganz 68 Jahren ist Dorn uns am 13. Juni 1916 durch den Tod genommen worden. Ein unerwarteter Schlaganfall setzte seinem an Arbeit und Erfolgen reichen Leben ein Ziel und riß ihn plötzlich heraus aus seinem Amt und mitten aus freudigem Schaffen. Die Tage und Wochen zuvor waren mit seiner gewohnten Tätigkeit im Halleschen Institut und Hörsaal ausgefüllt, und noch wenige Stunden vor seinem Tode beschäftigte ihn eine für die Kriegstechnik wichtige wissenschaftliche Untersuchung.



E. Dorn

Wer kann die unsichtbaren stillen Wirkungen aufdecken, die in dieser schweren Kriegszeit an eines jeden Leben nagen und Lebenskräfte, die im Frieden für viele Jahre ausgereicht hätten, schnell verzehren! Wir freuten uns schon darauf, in zwei Jahren Dorns 70. Geburtstag festlich zu begehen. Und doch ist sein Schicksal um seiner selbst willen nicht zu beklagen; denn er starb so, wie er sichs manchmal wünschte, plötzlich wie durch einen Blitzschlag, ohne körperliches oder seelisches Leiden. Wir andern müssen uns damit abfinden und wollen dankbar sein für das Leben dieses als Forscher, Lehrer und Mensch gleicherweise hervorragenden Mannes.

Dorn wurde am 27. Juli 1848 in dem ostpreußischen Landstädtchen Guttstadt geboren. In Königsberg war er in den Jahren 1865—1869 Student und fand von 1870—1872 eine erste berufliche Tätigkeit als Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten in Königsberg und Berlin. Seine mathematisch-physikalische Ausbildung empfing Dorn von Franz Neumann, dessen Einfluß auch für seine ersten produktiven Arbeiten bestimmend war. Und noch später zeigt er sich durch die Herausgabe von Franz Neumanns Vorlesungen über theoretische Optik (1885) als Angehöriger jener frühen klassischen Physikerschule in Königsberg.

Bei seiner Doktorpromotion 1871 in Königsberg und seiner Habilitation als Privatdozent der Mathematik in Greifswald 1873 beschäftigten den jungen Dorn die Transformationen elliptischer Integrale und ultraelliptischer Funktionen. Daneben befaßte er sich mit einem geophysikalischen Problem, indem er die Königsberger Beobachtungen über die Temperatur der Erde in verschiedenen Tiefen mehrere Jahre lang zusammenfassend bearbeitete.

Bereits das Jahr seiner Habilitation 1873 brachte dem 25-Jährigen einen Ruf als Extraordinarius der Physik nach Breslau, wohin ihn

O. E. Meyer zog, und zugleich die Wendung zu überwiegend experimental-physikalischen Arbeiten. Im Jahre 1881 folgte er einem Ruf an die Technische Hochschule in Darmstadt als Ordinarius der Physik, und seit 1886 hat er dann an der Universität Halle in der gleichen Stellung gewirkt, seit 1895 auch als Direktor des Physikalischen Instituts, das als einer der ersten Eigenbauten dieser Art in Deutschland unter seiner Leitung vollendet und mustergültig ausgestattet wurde.

Was Dorn in diesem Hause, in dem er auch wohnte und starb, ebenso wie schon in früheren Jahren, seinen Schülern gewesen ist, kann hier nur kurz ausgesprochen werden. Seine meisterhafte Kunst des Unterrichts und des Experiments, die er mit warmer persönlicher Anteilnahme und oft geradezu aufopfernder Hingabe verband, hat in der langen Zeit seines Wirkens bei einer großen Anzahl von Schülern gediegene Grundlagen physikalischer Bildung geschaffen. Dem hochverehrten Lehrer folgt über das Grab hinaus dankbare Erinnerung dafür. Die Wirkungen seines vorbildlichen vornehmen Charakters und des Beispiels, das er mit seinem Leben strengster Pflichterfüllung gab, werden dauernd sein.

In seinem wissenschaftlichen Leben hat Dorn die gewaltige Entwicklung der Physik der vier letzten Jahrzehnte mitschaffend durchlebt. Bis in seine letzten Lebensjahre hinein verfolgte er mit bewundernswürdiger Elastizität auch die kühnsten Fortschritte der Physik, prüfte sie mit der ihm eigenen Gründlichkeit, nahm Stellung zu ihnen und arbeitete als Forscher selbst mit, allein oder zusammen mit seinen Assistenten und Doktoranden. Eine erschöpfende Darstellung seines Lebenswerkes kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Wir müssen zahlreiche Untersuchungen auf verschiedenen Gebieten der Physik übergehen und uns mit einer kurzen Betrachtung von vier Hauptgruppen seiner Arbeiten begnügen: absolute Widerstandsmessung, Röntgenstrahlen, Radioaktivität, flüssige Kristalle.

Seit seiner Breslauer Zeit beschäftigte sich Dorn mit elektrischen Messungen, die ihn viele Jahre lang ausschließlich in Anspruch nahmen und als Frucht eine der wertvollsten Ohmbestimmungen ergaben. 1882 begann er in Darmstadt die Reihe von Untersuchungen, die eine absolute elektrische Widerstandsmessung zum Ziele hatten. Es war damals eine der wichtigsten Zeitaufgaben der Physik, von gleicher Bedeutung für die weitere Forschung wie für die zu erlassenden gesetzlichen Bestimmungen, durch die exakte Bestimmung der Widerstandseinheit für die Elektrizitätsmessung ebenso genaue wissenschaftliche Grundlagen zu schaffen, wie sie für die Längen- und Temperaturmessung bereits in den Pariser Normalien vorlagen. Die Aufgabe reizte Dorn, und er bestimmte zunächst die Siemenseinheit in absolutem Maß. Hierzu wie zu der späteren Ohmbestimmung (1883—1888) verwendete er die dritte Methode von W. Weber in veränderter Form: Es wird die Dämpfung eines einzelnen kräftigen Magneten durch die ihn eng umschließenden Windungen eines Multiplikators beobachtet und die Galvanometerfunktion durch Vergleich mit einer Tangentenbussole ermittelt. Eine Anzahl von experimentellen und theoretischen Nebenuntersuchungen diente dem Studium der Fehlerquellen; mit besonderer Sorgfalt wurden die magnetischen Einflüsse beseitigt. Die verwendeten Drahtwiderstände sind mit den in Würzburg konstruierten Normalquecksilberröhren von F. Kohlrausch verglichen worden. Für die Länge derjenigen Quecksilbersäule von 1 mm² Querschnitt, die bei 0° einen elektrischen Widerstand von 1 Ohm $= 10^9$ cm · sek^{-1} besitzt, ergab sich der Wert $1{,}0624_3$ m.

Eine Anerkennung für diese mühevolle Arbeit fand Dorn darin, daß ihn Helmholtz aufforderte, sich über den wahrscheinlichsten Wert des Ohm zu äußern; in zwei größeren Abhandlungen von 1893 und 1895 hat er daraufhin die bis 1890 ausgeführten Ohmbestimmungen kritisch verglichen.

Gleich nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen studierte Dorn eifrig ihre Eigenschaften. Er zeigte, daß sie transversale Schwingungen sind (1896), beobachtete ihre Sichtbarkeit (1897—1898) und wies zuerst ihre erwärmende Wirkung durch quantitative Messungen nach (1897). Besonders hervorzuheben ist, daß Dorn als erster die Entladung negativ geladener Körper durch Röntgenstrahlen beobachtete (1896), daß er den kathodenstrahlartigen Charakter der hierbei entstehenden Sekundärstrahlen durch Absorptionsmessungen und magnetische Ablenkungsversuche entdeckte und die Geschwindigkeit dieser Elektronenstrahlen bestimmte (1900). Die Benennung „Dorn-Strahlen“ für diese Sekundärstrahlen der Röntgenstrahlen wäre daher füglich gerechtfertigt.

Unter Dorns Arbeiten auf dem Gebiete der Radioaktivität ist vor allem seine Entdeckung der Radiumemanation zu nennen. Er fand dieses neue Gas im Jahre 1890 gleich nach Rutherfords Entdeckung der Thoremanation und stellte seine wichtigsten Eigenschaften fest. Die zahlreichen, meist von Doktoranden ausgeführten Untersuchungen der Radio-

aktivität von Quellen, Bodenluft und Gesteinen sollen nicht unerwähnt bleiben.

Die schwierige Frage nach der Natur der flüssigen Kristalle konnte nur durch quantitative physikalische Messungen einwandfrei entschieden werden. Das hat Dorn als einer der ersten erkannt. Man verdankt ihm und seinen Schülern eine große Anzahl exakter Bestimmungen von Konstanten flüssiger Kristalle (seit 1906). Besonders die optischen Eigenschaften wurden untersucht (Brechungsindex, Doppelbrechung, Rotation, anomale Rotationsdispersion, magnetische Rotation, Absorptionsspektrum), aber auch andere Konstanten (Dielektrizitätskonstante, innere Reibung, Kapillarität, Dichte), die für das Verständnis der eigenartigen Erscheinungen an diesen Körpern von Bedeutung sind.

Durch seine mustergültigen Messungen und seine weiterführenden Entdeckungen, auch in manchen der hier nicht genannten Arbeiten, wird Dorns Gedächtnis in der Geschichte der Physik fortleben, noch dauernder als das Denkmal der Erinnerung, das er sich in den Herzen seiner Schüler und Fachgenossen gesetzt hat.

Albert Wigand.

(Eingegangen 13. Juli 1916.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur kinetischen Theorie der Verdampfung.

Von A. March.

1. Die Abhängigkeit des Druckes gesättigter Dämpfe von der Temperatur zu bestimmen, war das Ziel einer außerordentlich großen Zahl von theoretischen Arbeiten. Soweit diese Versuche von rein thermodynamischer Grundlage ausgehen, wenden sie sämtlich den zweiten Hauptsatz auf den Vorgang der Verdampfung an und suchen die auftretende Differentialgleichung mit Hilfe möglichst einfacher Annahmen zu integrieren, indem sie etwa die Verdampfungswärme als lineare Funktion der Temperatur annehmen, auf den Dampf die Gesetze idealer Gase anwenden und das spezifische Volumen der Flüssigkeit gegenüber dem des Gases vernachlässigen. Das Resultat ist in den weitaus meisten Fällen dasselbe: es ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$\lg p = A - \frac{B}{T} - C \log T,$$

in der p den Dampfdruck, T die absolute Temperatur und A, B, C Konstanten bedeuten. Diese Gleichung, die unter dem Namen Dupré-Rankinesches Dampfspannungsgesetz bekannt ist, zeigt in der Tat vorzügliche Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn die Werte der Konstanten aus den beobachteten Daten bestimmt werden. Dagegen bleiben die Versuche, die Konstanten aus der Theorie heraus zu bestimmen, sämtlich erfolglos, wie schon vor längerer Zeit Juliusburger[1]) in einer sehr sorgfältigen Untersuchung gezeigt hat. Man muß daraus schließen, daß die empirische Gültigkeit des Gesetzes mit seiner thermodynamischen Herleitung zumindest für hohe Temperaturen nichts zu tun hat und der Erfolg der Theorie also bloß ein zufälliger ist.

Die zweite Möglichkeit einer Theorie ist die molekular-kinetische Betrachtung des Verdampfungsvorganges. Das Gleichgewicht zwischen Dampf und Flüssigkeit kommt dadurch zustande, daß in jedem Zeitelement eine Anzahl Moleküle vermöge der Energie ihrer Wärmebewegung die Flüssigkeit verlassen und in den Dampfraum hineinfliegen und umgekehrt aus dem Dampfraum eine gleiche Zahl von Molekülen auf die Oberfläche der Flüssigkeit auftreffen und von ihr aufgenommen werden. Gelingt es also, die Zahl der Moleküle zu berechnen, die in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit austreten, so kann man ohne weiteres auf Dichte und Druck des Gases schließen, das mit dem Kondensat im Gleichgewicht steht. Bei der Berechnung dieser Zahl nun ist zu berücksichtigen, daß an der Oberfläche der Flüssigkeit Kräfte wirksam sind, die nach innen gerichtet sind und das Herausfahren der Flüssigkeitsmoleküle erschweren und daß also bloß jene Moleküle, deren Energie einen gewissen kritischen Betrag übersteigt, die Oberflächenschichte durchstoßen können. Wenn die Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle nach dem Maxwellschen Verteilungssatz erfolgt, so ist die Zahl der auftreffenden Moleküle mit einer Geschwindigkeitskomponente u senkrecht zur Oberfläche, die $> s$ ist

$$N_i \sqrt{\frac{hm}{\pi}} \int_s^\infty u e^{-hmu^2} du = \frac{N_i}{2\sqrt{hm\pi}} e^{-hms^2}$$

Dabei bedeutet N_i die Zahl der Moleküle im ccm der Flüssigkeit. Die Zahl der aus dem

1) P. Juliusburger, Ann. d. Phys. **3**, 618, 1900.

Dampfraum in der Zeiteinheit sich kondensierenden Moleküle beträgt, wenn N_a die Molekülzahl im ccm des Gasraumes bedeutet

$$N_a \sqrt{\frac{hm}{\pi}} \int_0^s u e^{-hmu^2} du = \frac{N_a}{2\sqrt{hm\pi}}$$

Die Gleichgewichtsbedingung führt somit zur Gleichung

$$N_a = N_i e^{-hms^2}.$$

Könnte man die Größe der kritischen Mindestgeschwindigkeit s bestimmen, so könnte aus dieser Gleichung bei bekanntem N_i die Molekülzahl N_a und somit auch der Druck des gesättigten Dampfes berechnet werden. Aber die Bestimmung von s stößt auf Schwierigkeiten, denn es zeigt sich, daß es unzutreffend wäre, die Größe $^1/_2 ms^2$ als Verdampfungswärme aufzufassen. Die Gründe dafür sind von Dieterici[1]) und Voigt[2]) klargestellt worden und liegen darin, daß beim Durchgang der Moleküle durch die Grenzschichte die Energie bei jedem Zusammenstoß eine Strecke überspringt, ohne dabei einer Verkleinerung durch die Oberflächenkräfte ausgesetzt zu sein. Um $^1/_2 ms^2$ zu erhalten, muß von der Verdampfungswärme der Betrag Pv abgezogen werden, wenn P den von van der Waals mit $\frac{a}{v^2}$ bezeichneten Druck bedeutet. Damit ist die Aufgabe auf die Bestimmung der Verdampfungswärme und des spezifischen Volumens v als Funktionen der Temperatur zurückgeführt.

Van der Waals[3]) hat in Anlehnung an das Gesetz der übereinstimmenden Zustände für die Dampfspannungskurve die Gleichung angegeben

$$\log \frac{\pi_0}{p} = a\left(\frac{\vartheta_0}{T} - 1\right)$$

worin π_0 und ϑ_0 kritischen Druck und kritische Temperatur der Substanz bedeuten und a innerhalb gewisser Grenzen eine Konstante ist. Da diese Gleichung in ziemlich naher Übereinstimmung mit der Erfahrung steht, kann man vermuten, daß der Theorie auch noch eine andere Möglichkeit offen steht, zu einem Dampfspannungsgesetz zu gelangen: nämlich die, ein molekularmechanisches Modell anzugeben, dessen Eigenschaften durch die kritischen Daten bestimmt sind und das den Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und Dampf veranschaulicht.

1) C. Dieterici, Wied. Ann. **66**, 826, 1898.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. S. 341, 1896, S. 19 u. 261, 1897.
3) van der Waals, Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes.

2. Ein solches Modell nun, das den angegebenen Forderungen genügt, ist das folgende: Zwei Flüssigkeitsmoleküle sollen mit einer der gegenseitigen Entfernung r proportionalen Kraft $a^2 r$ einander anziehen; doch soll diese Anziehungskraft nur auf eine gewisse Entfernung s reichen. Vermöge der Wärmeenergie wird dann das eine Molekül das zweite in einer Ellipse umlaufen; wir nehmen an, daß diese Bewegung in einer Kreisbahn erfolgt. Die Geschwindigkeit des Moleküls ist dann

$$u = 2\pi\nu r,$$

wenn r den Abstand und ν die Umlaufszahl in der Zeiteinheit bedeuten. Weil sich Zentrifugalkraft und anziehende Kraft $a^2 r$ einander das Gleichgewicht halten, ist

$$a^2 r = m\, 4\pi^2 \nu^2 r. \qquad (1)$$

Die lebendige Kraft des Moleküls, die nach der statistischen Mechanik proportional ist der absoluten Temperatur, beträgt

$$^1/_2 m\, 4\pi^2 \nu^2 r^2 = \frac{a^2 r^2}{2} = kT. \qquad (2)$$

Nach der Quantentheorie ist noch eine Nullpunktsenergie im Betrage von $^1/_2 h\nu$ in Rechnung zu ziehen, so daß wir dann erhalten

$$^1/_2 a^2 r^2 + ^1/_2 h\nu = kT. \qquad (2')$$

Der Radius der Kreisbahn wird also mit wachsender Temperatur zunehmen. Von der Anziehungskraft haben wir angenommen, daß sie nur innerhalb einer gewissen Entfernung s wirksam ist, so daß sich zwei Moleküle, deren gegenseitiger Abstand größer als s geworden ist, unabhängig voneinander bewegen. Es liegt nun nahe, anzunehmen, daß diese Entfernung s bei der kritischen Temperatur erreicht wird; denn diese Temperatur ist ja gerade dadurch bestimmt, daß ihr die höchstzulässige Wärmebewegung entspricht, bei der ein Zusammenhalt der Moleküle noch stattfindet. Demnach ist s durch das kritische Volumen φ_0 bestimmt und wir können setzen

$$\alpha s^2 = \frac{\varphi_0}{N}, \qquad (3)$$

wenn N die Zahl der Moleküle und α eine (später zu bestimmende) Konstante von der Dimension einer Länge bedeutet. Für die kritische Temperatur ϑ_0 erhalten wir also aus (2')

$$^1/_2 a^2 \frac{\varphi_0}{N\alpha} + ^1/_2 h\nu = k\vartheta_0. \qquad (4)$$

Vernachlässigen wir $^1/_2 h\nu$, so wird

$$a^2 = 2k\vartheta_0 \frac{N\alpha}{\varphi_0}. \qquad (5)$$

Es sei jetzt mit χ_r die potentielle Energie eines

Moleküls bezeichnet, wenn dessen Abstand vom Nachbarmolekül gleich r ist; χ_r bedeutet also die potentielle Energie für die Entfernung $r > s$, d. h. eines Moleküls im freien Zustande. Nach dem früher Gesagten ist χ_r gegeben durch

$$\chi_r = \frac{a^2 r^2}{2}; \qquad (6)$$

es ist aber anzunehmen, daß auch der innere Zustand des Moleküls durch die Nähe des zweiten Moleküls beeinflußt wird. Auch von der Kraft dieser inneren Veränderung nehmen wir an, daß sie proportional der Entfernung r sei, so daß wir den Ausdruck (6) noch mit einer von der Natur der Substanz abhängigen Zahl β zu multiplizieren haben.

Auf Grund dieser Voraussetzungen ist es jetzt möglich, mit Hilfe des Boltzmannschen e-Satzes die Dampfdichte zu bestimmen. Die Art dieser Berechnung ist bereits von O. Stern[1]) gezeigt worden, der eine Dampfdruckformel für feste, einatomige Körper abgeleitet hat. Bezeichnen wir nämlich die Moleküldichten im Gasraum und in der Entfernung r mit n_0 und n_r, so ist nach Boltzmann

$$n_0 : n_r = e^{-\frac{\chi_s}{kT}} : e^{-\frac{\chi_r}{kT}}$$

oder

$$n_r = n_0 \, e^{\frac{\chi_s}{kT}} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}}.$$

Da die mittlere Zahl der in einer Anziehungssphäre enthaltenen Moleküle gleich 2 ist, so ist

$$\int_0^s n_r \, 2\pi r \, dr = 2$$

oder

$$\int_0^s n_0' \, e^{\frac{\chi_s}{kT}} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}} \, 2\pi r \, dr = 2,$$

somit

$$n_0 = \frac{2}{2\pi e^{\frac{\chi_s}{kT}} \int_0^s e^{-\frac{\chi_r}{kT}} r \, dr}, \qquad (7)$$

die potentielle Energie beträgt nach (6) $\frac{a^2 r^2}{2}\beta$, so daß

$$\int_0^s e^{-\frac{\chi_r}{kT}} r \, dr = \int_0^s e^{-\frac{a^2 r^2 \beta}{2kT}} r \, dr.$$

Ist $\frac{a^2 \beta s^2}{2kT}$ genügend groß, so können wir für die obere Grenze des Integrals ∞ nehmen und wir erhalten durch die Substitution

$$\frac{a^2 \beta r^2}{2kT} = x^2; \quad r \, dr = 2x \, dx \cdot \frac{kT}{a^2 \beta}$$

$$\int_0^s e^{-\frac{\chi_r}{kT}} r \, dr = \int_0^s e^{-x^2} \frac{2kT}{a^2 \beta} x \, dx = \frac{kT}{a^2 \beta}.$$

Die potentielle Energie χ_s hat den Wert

$$\frac{a^2 \beta s^2}{2} = \beta k \vartheta_0.$$

Somit wird

$$n_0 = e^{-\beta \frac{\vartheta_0}{T}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a^2 \beta}{kT} \qquad (8)$$

und nach Einsetzen des Wertes für a^2 aus (5)

$$n_0 = \frac{2kN\alpha\beta}{kT \cdot \pi} \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta \frac{\vartheta_0}{T}}. \qquad (8')$$

Um den Dampfdruck zu erhalten, müssen wir n_0 mit kT multiplizieren und erhalten

$$p = \frac{2\alpha\beta}{\pi} \cdot kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta \frac{\vartheta_0}{T}}. \qquad (9)$$

Um die Konstante α zu bestimmen, berechnen wir den kritischen Druck, indem wir für T den Wert ϑ_0 einsetzen. Es ergibt sich

$$\pi_0 = \frac{2\alpha\beta}{\pi} \cdot kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta}.$$

Nach der Zustandsgleichung von van der Waals soll nun aber sein

$$\pi_0 = \frac{3}{8} kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0}.$$

Somit wird

$$\frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-\beta} = \frac{3}{8}$$

oder

$$\frac{2\alpha\beta}{\pi} = \frac{3}{8} e^{\beta}.$$

Unter Benutzung dieser Beziehung erhalten wir aus (9)

$$p = \frac{3}{8} kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta\left(\frac{\vartheta_0}{T} - 1\right)} \qquad (10)$$

oder

$$p = \pi_0 \, e^{-\beta\left(\frac{\vartheta_0}{T} - 1\right)}. \qquad (11)$$

Das Ergebnis der Rechnung ist also die van der Waalssche Dampfdruckformel.

3. Es ist durchaus nicht wahrscheinlich, daß das den angestellten Betrachtungen zugrunde gelegte Modell der Wirklichkeit entspricht; denn die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte sind zweifellos von komplizierterer Art als hier angenommen wurde. Wenn gleichwohl die Theorie zu einem zutreffenden Resultate führt,

1) O. Stern, diese Zeitschr. 14, 629, 1913.

so mag der Grund dafür darin liegen, daß eben mehrere Arten von molekularen Mechanismen möglich sind, deren makroskopische Äußerungen mit der Erfahrung Übereinstimmung zeigen, und daß es nicht so sehr das Kraftgesetz, als vielmehr gewisse durch die kritischen Daten bestimmte Eigenschaften des Mechanismus sind, von denen die Größe des Dampfdruckes abhängt. Das Theorem der übereinstimmenden Zustände würde zutreffen, wenn die Größe β für alle Substanzen denselben Wert hätte; da diese Größe aber von der Zahl der inneren Freiheitsgrade des Moleküls abhängt, wird sie sich mit der Natur der Substanz ändern. Dieser letzte Punkt ist von besonderer Bedeutung; die inneren Veränderungen eines Moleküls brauchen dabei durchaus nicht bloß in einer Änderung der gegenseitigen Lage der Atome zu bestehen; es ist vielmehr wahrscheinlich, daß auch die Atome selbst innerer Veränderungen von unbekannter Art fähig sind.

Innsbruck, den 16. Juni 1916.

(Eingegangen 19. Juni 1916.)

Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen.

Von Karl Uller.

Zweck dieser Abhandlung ist die Darstellung der Schallwellen in der Art, wie ich sie den elastischen und elektromagnetischen Wellen von elementarer Schwingungsform bereits gegeben habe. Während die bisher übliche nur für einfache Wellen gilt, gibt diese neue den allgemeinsten Bau der Wellen, und zwar in einheitlicher Fassung. Eine erste Anwendung davon werde ich für die Akustik der Atmosphäre machen.

1. Die zwei Arten von Wellen. Ist $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit und D die Massendichte in einem (unendlich) kleinen Volumenelement, so stellt ein Geschwindigkeitsfeld ($\mathfrak{V}$) im Verein mit einem Dichtefelde (D) eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar, wenn zwischen beiden die Beziehung

$$-D\operatorname{div}\mathfrak{V} = d'D/dt = \dot{D} + (\mathfrak{V}, \operatorname{grad} D) \quad (1)$$

erfüllt ist, welche die Natur des Flüssigen zum Ausdruck bringt. Für die Spannungen ($\mathfrak{T}$) bekommt man aus den Annahmen, daß die Hauptdrucke mit den Verrückungsachsen zusammenfallen und bezüglich der inneren Reibung lineare Funktionen der Dilatationsgeschwindigkeiten in jenen Achsen sind,

$$\mathfrak{T} = -\{P - \mathfrak{f}_v \operatorname{div}\mathfrak{V}\}\mathfrak{n} + 2\mathfrak{f}_g(\mathfrak{n}\Gamma)\mathfrak{V} + \mathfrak{f}_g[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{V}]. \quad (2)$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{n}$ die Einheitsnormale einer (unendlich) kleinen Flächeneinheit, P den Betrag des „isotropen Druckes", $\mathfrak{f}_g$ und $\mathfrak{f}_v$ die beiden Friktions- oder Zähigkeitskoeffizienten der Flüssigkeit; letztere sind nach obigem unabhängig von der Geschwindigkeit gedacht, für P jedoch besteht keine Voraussetzung.

Als Bewegungsgleichung erhalten wir mit (2)

$$\begin{aligned} D\cdot\mathfrak{G} &= -\operatorname{grad}P + (2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{V} - \mathfrak{f}_g \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V} \\ &\quad + 2(\operatorname{grad}\mathfrak{f}_g\Gamma)\mathfrak{V} + \operatorname{div}\mathfrak{V}\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{f}_v - [\operatorname{rot}\mathfrak{V}\operatorname{grad}\mathfrak{f}_g] \\ &= D\cdot d\mathfrak{V}/dt = D\{\dot{\mathfrak{V}} + (\mathfrak{V}\Gamma)\mathfrak{V}\} \quad (3) \\ &= D\{\dot{\mathfrak{V}} + {}^1/_2\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{V}^2 - [\mathfrak{V}\operatorname{rot}\mathfrak{V}]\}. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet ($\mathfrak{G}$) das äußere Kraftfeld, wie z. B. die Schwere, auf die Masseneinheit bezogen.

Die Betrachtung der aus diesen Grundgleichungen ableitbaren Energie-Vergeudungsgleichung zeigt, daß $\mathfrak{f}_g$ und $2\mathfrak{f}_g + 3\mathfrak{f}_v \geq 0$ sein müssen; gewöhnlich nimmt man an, daß der letzte Ausdruck gerade verschwindet.

Einschränkend setzen wir jetzt voraus:

a) daß das äußere Kraftfeld ($\mathfrak{G}$) keinen merklichen dynamischen Einfluß ausüben kann, sondern merklich nur einen hydrostatischen Druck

$$\mathfrak{T}_0 = -P_0\,\mathfrak{n}. \quad (4)$$

Wir dürfen dann $D\cdot\mathfrak{G}$ durch den lokalen zeitlichen Mittelwert ersetzen und schreiben

$$\overline{D\cdot\mathfrak{G}} = \operatorname{grad}P_0 \quad (5)$$

b) es sei $(\mathfrak{V}\Gamma)\mathfrak{V}$ so klein gegen $\dot{\mathfrak{V}}$, daß dies Glied der Beschleunigung gegen jenes vernachlässigt werden darf.

Bedenken wir nun, daß der isotrope Normaldruck P keine Drehung der Teilchen hervorrufen, sondern nur Dichteänderungen bewirken kann, daß somit P nur in lamellarer Welle auftreten kann, so kommen wir, indem wir $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_g + \mathfrak{V}_v$ setzen und statt $-\operatorname{grad}(P - P_0)$ schreiben: $-(dP/dD)\operatorname{grad}D$, zu folgenden zwei Gleichungssystemen:

Die Flüssigkeits-Scherungswellen:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathfrak{V}_g = 0 \\ &D\cdot\dot{\mathfrak{V}}_g = -\mathfrak{f}_g \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_g - [\operatorname{rot}\mathfrak{V}_g\operatorname{grad}\mathfrak{f}_g] \\ &\qquad + 2(\operatorname{grad}\mathfrak{f}_g\Gamma)\mathfrak{V}_g; \\ &\mathfrak{T}_g = 2\mathfrak{f}_g(\mathfrak{n}\Gamma)\mathfrak{V}_g + \mathfrak{f}_g[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_g]. \end{aligned}\right| \quad (6)$$

Die Flüssigkeits-Verdünnungswellen:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathfrak{V}_v = 0 \\ &D\dot{\mathfrak{V}}_v = -\operatorname{grad}\{P - P_0\} \\ &\qquad + (2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{V}_v + 2(\operatorname{grad}\mathfrak{f}_g\Gamma)\mathfrak{V}_v \\ &\qquad + \operatorname{div}\mathfrak{V}_v\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{f}_v; \\ &\mathfrak{T}_v = -\{P - \mathfrak{f}_v\operatorname{div}\mathfrak{V}_v\}\mathfrak{n} + 2\mathfrak{f}_g(\mathfrak{n}\Gamma)\mathfrak{V}_v; \\ &\operatorname{grad}\{P - P_0\} = (dP/dD)\operatorname{grad}D \end{aligned}\right| \quad (7)$$

merklich, gemäß der Einschränkung (a).

Beide Systeme haben nur noch die Dichte D gemeinsam, falls beide zugleich im selben Raume existieren.

Die Widerständigkeit der Flüssigkeit

$$\Gamma = \frac{dP}{dD} = \left(\frac{dP}{dD}\right)_\vartheta + \left(\frac{dP}{dD}\right)_D \cdot \frac{d\vartheta}{dD},$$

sowie P, $\mathfrak{f}_g$ und $\mathfrak{f}_v$ sind Funktionen der Temperatur ϑ und der Dichte D, welche beide durch äußere und innere Ursachen bestimmt werden. Die äußeren wie z. B. in bezug auf die Erdatmosphäre die Sonnenstrahlung und die Erdschwere, können als gegeben angesehen werden, somit auch die von ihnen hervorgerufenen Temperaturen und Dichten, während die inneren Ursachen von der Welle selbst herrühren und Temperaturen und Dichten bewirken, die Funktionen des Geschwindigkeitsfeldes sind. — Das Auftreten der Größe $d\vartheta/dD$ zeigt, daß die Wärmeerzeugung und Wärmeverteilung einerseits und der Wellenbau andererseits sich gegenseitig beeinflussen.

Wir sehen also, daß die Bewegungsgleichungen streng genommen nicht linear sind. Dennoch sind Wellen von elementarer Schwingungsform möglich, allemal nämlich

c) wenn die von den Wellen hervorgerufenen Dichte- und Temperaturschwankungen klein sind, was allermeist auch zutrifft. Dann lassen sich zeitliche Mittelwerte einführen.

Bezeichnen wir nunmehr mit $\bar{\mathfrak{f}}_g$ den zeitlichen Mittelwert des ersten Zähigkeitskoeffizienten, so nimmt das System (6) dieselbe Form an wie das System (6) des § 4 der vorigen Abhandlung[1]). Es gelten also auch alle aus diesem ableitbaren Folgerungen. Der Bau einer Flüssigkeits-Scherungswelle $(\mathfrak{v}_g \cdot e^{i\Phi_g})$ ist also derselbe wie der einer elastischen Scherungswelle. Für das Quadrat des Wellennormalenpaares in einer umkehrbaren Welle finden wir $w^2 = {a_0}^2/D_0 \cdot D/a$, was in ${a_0}^2/a$ übergeht, falls Wellen dieser Art allein im selben Gebiet vorhanden sind. Zu beachten ist indessen, daß die Zusammensetzung der Wellencharakteristik a eine andere ist als bei den elastischen Wellen, es ist nämlich hier

$$a = -i\nu D\bar{\mathfrak{f}}_g, \tag{8}$$

also $a' = \nu'' D\bar{\mathfrak{f}}_g$ und $a'' = -\nu' D\bar{\mathfrak{f}}_g$.

Nicht so einfach und nicht in ganz so guter Annäherung gestalten sich Flüssigkeits-Verdünnungswellen $(\mathfrak{v}_v \cdot e^{i\Phi_v})$ von elementarer Schwingungsform, selbst wenn sie allein im Raum auftreten. Früher[2]) habe ich gezeigt, daß einem Geschwindigkeitsfeld

$$\mathfrak{V} = {}^1\!/_2 \cdot \{V \cdot e^{i\nu t} + V^* \cdot e^{-i\nu^* t}\}$$

in einer Flüssigkeit eine lokale Dichte von der Form

$$D = \bar{D} - {}^1\!/_2 \cdot \{\Delta i v \cdot e^{i\nu t} - \Delta^* i v^* \cdot e^{i\nu^* t}\} \tag{9}$$

entspricht; denn dieser Ansatz befriedigt in guter Annäherung die Kontinuitätsgleichung (1) in der Form

$$\dot{D} + (\mathfrak{V} \operatorname{grad} \bar{D}) = -\bar{D} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{V}, \tag{10}$$

wenn gesetzt wird

$$\Delta = \bar{D} \operatorname{div} V + (V, \operatorname{grad} \bar{D}). \tag{11}$$

Überstreichung einer Größe soll ihren zeitlichen Mittelwert anzeigen.

Wir erhalten auch für die nach der Zeit differentiierte Bewegungsgleichung, der zweiten unter (7), die elementare Schwingungsform als Lösung, wenn wir in ihr für die Reibungskoeffizienten $\mathfrak{f}_g$, $\mathfrak{f}_v$ und für die Dichte D ihre Mittelwerte einsetzen, was unbedenklich geschehen kann. Aber auch für die Widerständigkeit $\Gamma = dP/dD$ sind wir zur Bestimmung von V genötigt den Mittelwert einzusetzen, was eben die weniger gute Annäherung zur Folge hat. Damit geht nun die genannte Bewegungsgleichung über in

$$\left.\begin{aligned} &\nu^2 \bar{D} V + \{\bar{\Gamma}\bar{D} + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)\} \operatorname{grad} \operatorname{div} V \\ &\qquad + \bar{\Gamma} \operatorname{grad}(V \operatorname{grad} \bar{D}) \\ &+ \{\bar{\Gamma} \operatorname{grad} \bar{D} + i\nu \operatorname{grad} \bar{\mathfrak{f}}_v\} \operatorname{div} V \\ &\qquad + i\nu 2(\operatorname{grad} \bar{\mathfrak{f}}_g P) V = 0. \\ &\text{mit der Nebenbedingung } \operatorname{rot} V = 0. \end{aligned}\right| \tag{12}$$

Dies System ist formal ähnlich dem System (7) im § 4 der genannten Grundlegung, das elastische Verdünnungswellen darstellt; für $\Gamma = 0$ sind beide gleich.

Die Voraussetzung (b) verlangt, daß

$$|(V\Gamma)V| / \sqrt{(VV^*)} << |\nu|$$

sei; es kann also das Geschwindigkeitsfeld räumlich um so stärker variieren, je größer die Frequenz ist.

Ein elliptisch schwingendes Geschwindigkeitsfeld in einer Flüssigkeit oder in einem Gase bewirkt eine Massenabwanderung, wie ich an dem oben angeführten Ort gezeigt habe. Diese mißt der Ausdruck

$$\bar{D} \cdot \bar{\mathfrak{V}} = e^{i(\nu - \nu^*)t} \cdot {}^1\!/_2 i \cdot \{\Delta^* \nu V - \Delta \nu^* V^*\} \tag{13}$$

Für den Mittelwert der kinetischen Energie in der Volumeneinheit haben wir noch

$$\bar{E} = {}^1\!/_2 \bar{D} \cdot \bar{\mathfrak{V}}^2 = e^{i(\nu - \nu^*)t} \cdot {}^1\!/_4 \cdot \bar{D}(VV^*). \tag{14}$$

2. Die Verdünnungswelle. Für eine Welle $(\mathfrak{v} \cdot e^{i\Phi})$ nimmt das System (12) des vorigen Abschnittes die Form an

1) K. Uller, Grundlegung usw. I (diese Zeitschr. 17. 168, 1916).

2) K. Uller, Über Flüssigkeitsbewegung bei vibratorischer Erregung (Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 813, 1914).

$$\left.\begin{aligned}
&\{\nu^2 D + 2\nu(\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\bar{\mathfrak{f}}_g)\}\mathfrak{v} - \{\Gamma D + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)\}\\
&\quad \times \{(\mathfrak{v}\mathfrak{w}) + i\operatorname{div}\mathfrak{v}\}\mathfrak{w}\\
&+ \{\Gamma D + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)\}\{\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} - i\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{w})\}\\
&\quad - i\Gamma(\mathfrak{v}\operatorname{grad} D)\mathfrak{w}\\
&+ \Gamma\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\operatorname{grad} D) + \{\operatorname{div}\mathfrak{v} - i(\mathfrak{v}\mathfrak{w})\} \times\\
&\{\Gamma\operatorname{grad} D + i\nu\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{f}}_v\} + i\nu 2(\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{f}}_g\Gamma)\mathfrak{v} = 0\\
&\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{v} + i[\mathfrak{v}\mathfrak{w}] = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Im Gegensatz zu der bei den elastischen Verdünnungswellen auftretenden Größe

$$\nu^2 D/(\varepsilon_v + {}^4/_3 \cdot \varepsilon_g) = a$$

hat hier die entsprechende Größe

$$\nu^2 D/\{\Gamma D + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)\} = a \quad (2)$$

verwickeltere Zusammensetzung, indem wir streng genommen bekommen:

$$a' = \frac{(\nu'^2 - \nu''^2)\Gamma + \nu''(\nu'^2 + \nu''^2)(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)/D}{|\Gamma + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)/D|^2}$$

$$a'' = \frac{2\nu'\nu''\Gamma - \nu'(\nu'^2 + \nu''^2)(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)/D}{|\Gamma + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)/D|^2}\,.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß in unserer Verdünnungswelle der Wellenvektor $\mathfrak{v}$ dem Wellennormalenpaar $\mathfrak{w} = -\operatorname{grad}\Phi$ vermöge der Nebenbedingung proportional ist. Sucht man nämlich die Bedingung für die Lage der Verrückungsachsen $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ in einem Punkt der Welle, so ergibt sich aus dem Verschwinden der Schubspannungen auf diesen Achsen, wenn man die Tensornormale mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet

$$2\bar{\mathfrak{f}}_g \cdot \{[\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\Gamma)\mathfrak{v}] - i(\mathfrak{n}\mathfrak{w})[\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\} = 0\,. \quad (3)$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ kommt bei Berücksichtigung der Nebenbedingung unter (1)

$$([\mathfrak{n}\mathfrak{v}](\mathfrak{n}\Gamma)\mathfrak{v}) = 0 = (\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\Gamma)\mathfrak{v}) + (\mathfrak{n}[[\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\operatorname{rot}\mathfrak{v}]),$$

also, da $(\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{v}) = i(\mathfrak{n}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}])$ und $(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{v}) = 0$ sein muß, (4)

$$(\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\Gamma)\mathfrak{v}) = -(\mathfrak{n}\mathfrak{v})(\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{v}) = -i(\mathfrak{n}\mathfrak{v})(\mathfrak{n}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]).$$

Bei skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{w}$ liefert (3) andererseits:

$$\begin{aligned}([\mathfrak{n}\mathfrak{w}](\mathfrak{n}\Gamma)\mathfrak{v}) &= (\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{w}]\Gamma)\mathfrak{v}) + (\mathfrak{n}[[\mathfrak{n}\mathfrak{w}]\operatorname{rot}\mathfrak{v}])\\ &= (\mathfrak{n}\mathfrak{w})(\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{v}),\ \text{also}\\ (\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{w}]\Gamma)\mathfrak{v}) &= 0\,. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Bedingungen (4) und (5), die gelten, welches auch der N.-P. der Zeitzählung sei, ergeben

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0,\ \text{also}\ \mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\Psi = \sigma\cdot\mathfrak{w} \quad (6)$$

zunächst nur auf den genannten Achsen, aber offenbar auch außerhalb derselben und somit in der ganzen Welle, denn $\mathfrak{v}$ ist unabhängig von der Tensornormalen $\mathfrak{n}$. Wenn aber $\operatorname{grad}\Psi = \sigma\cdot\operatorname{grad}\Phi$, ist σ notwendig eine Konstante. In einer gegebenen Verdünnungswelle ($\mathfrak{B}$) ist demnach Φ bis auf eine additive Konstante bestimmt, $\mathfrak{w}$ also vollständig. Diese eindeutige Größe $\mathfrak{w}$ nennen wir das Wellennormalenpaar. Umgekehrt gelangen wir somit zu dem Ergebnis:

Sind Frequenz und Dämpfung der Welle sowie die Körpereigenschaften gegeben, so ist die Verdünnungswelle durch das Wellennormalenpaar bestimmt — bis auf eine multiplikative Konstante, die willkürlich sein muß und vom N.-P. der Zeitzählung abhängt.

Dies Ergebnis gilt auch in einer elastischen Verdünnungswelle.

Ich habe den hier vorgetragenen Beweisgang, der zu (6) führt, schon früher[1]) beschritten, hier indessen die Gelegenheit wahrgenommen, ein Versehen zu berichtigen, das sich dort eingeschlichen hatte.

Das Wellennormalenpaar muß also die Funktion des Wellenvektors mit übernehmen. Eine Folge unseres Resultats ist, daß die Wellengleichung einer Verdünnungswelle nicht zerfällt. Man kann also das Phasengefälle einer Verdünnungswelle nicht umkehren, ohne den Bau der Welle zu ändern. Wegen der Nichtumkehrbarkeit gibt es auch nicht stehende Wellen im strengen Wortsinne.

Wenn wir $V = \operatorname{grad}\Omega$ setzen, ist der Nebenbedingung unter (12) des vorigen Abschnittes, der Lamellarität, auch auf diese Weise Genüge geschehen. In einer Welle haben wir dann $\mathfrak{v}\cdot e^{i\Phi} = \operatorname{grad}(\omega\cdot e^{i\Phi}) = e^{i\Phi}\{\operatorname{grad}\omega - i\omega\mathfrak{w}\}$. Verglichen mit (6) muß demnach ω konstant sein, wenn wir unter Φ diejenige Ortsfunktion verstehen, deren Gradient das Wellennormalenpaar liefert.

Für einen homogenen Körper geht die Wellengleichung unter (12) des vorigen Abschnittes über in $\operatorname{grad}\{a\Omega + \operatorname{div}\operatorname{grad}\Omega\} = 0$, d. h. es muß Ω die skalare Wellengleichung $a\Omega + \operatorname{div}\operatorname{grad}\Omega = 0$ befriedigen. Daraus folgt aber, daß in unserer Welle gelten muß

$$a - \mathfrak{w}^2 - i\operatorname{div}\mathfrak{w} = 0\,, \quad (7)$$

falls sie in einem homogenen Körper verläuft. Für eine Kugelwelle finden wir beispielsweise $\mathfrak{w} = \{\sqrt{a} - i/r\}\,\mathfrak{r}/r$, worin $\mathfrak{r}$ den Topographen vom Betrage r bezeichnet, und demnach

$$\Phi = -\sqrt{a}\cdot r + i\log r + \text{const}\,,$$

also

$$\mathfrak{W} = \{\sqrt{a} - i/r\}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\,e^{-i\sqrt{a}\cdot r - \log r + \text{const}}\,,$$

mit dem die bekannte Lösung

$$\operatorname{grad}(e^{-i\sqrt{a}\,r}/r)$$

formal übereinstimmt. Es sei a reell und positiv, die Schwingungen also ungedämpft, die Flüssigkeit

[1]) K. Uller, Zurückwerfung und Brechung elastischer Wellen (Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 835, 1914).

reibungslos und $\overline{I}$ positiv. Dann hat man $\mathfrak{w}' = \sqrt{a}$ und $\mathfrak{w}'' = -1/r$, so daß die Phasengeschwindigkeit $v'/\sqrt{a}$ und die Wellenlänge $2\pi/\sqrt{a}$ wird.

Die für die Dichteschwankungen maßgebende Größe Δ nimmt nach Gleichung (11) im ersten Abschnitt die Form an

$$\Delta = -ie^{i\Phi}\cdot\overline{D}\cdot\sigma\{\mathfrak{w}^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + i\,\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\log\overline{D})\}, \quad (8)$$

was in homogenen Körpern wegen (7) übergeht in

$$\Delta = -ie^{i\Phi}\cdot\overline{D}\cdot\sigma\cdot a. \quad (9)$$

Das besagt nicht, daß die Amplitude der Schwankungen überall in der Welle konstant sei. Denn in Φ steckt noch die Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$, die selbst in konservativen Körpern im allgemeinen nicht verschwindet, wie das Beispiel der Kugelwelle zeigt.

Für die Massenabwanderungsdichte in homogenen Körpern erhalten wir somit nach (13) im ersten Abschnitt

$$\overline{D}\cdot\mathfrak{B} = e^{-2(\nu''t+\Phi'')}/2\nu\nu^*\cdot\overline{D}\cdot\sigma\sigma^{*-1/2}\cdot\{a^*\nu\mathfrak{w} + a\nu^*\mathfrak{w}^*\} \quad (10)$$

Bei Reibungslosigkeit ($a = a^*$) und Ungedämpftheit ($\nu = \nu^*$) findet die Abwanderung in Richtung der Isophasen statt.

Die Elliptizität der Schwingung mißt nach § 1 der genannten Grundlegung

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\mathfrak{w}^2\cdot\mathfrak{w}^{*2}}}{(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{w}^*)}. \quad (11)$$

In vielen Fällen ist es erlaubt, die streng genommen vorhandene Nichtumkehrbarkeit der Verdünnungswelle zu übersehen. Dann liefert uns (1) mit Hilfe des Ergebnisses (6) die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}&\{(\overline{I}\,\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + i\nu 2(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_g)\\ &\quad + \overline{I}\,(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\overline{D})\}\mathfrak{w}\\ &+ \{\overline{I}\,\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{w}^2\\ &+ \mathfrak{w}^2\{\overline{I}\,\mathrm{grad}\,\overline{D} + i\nu\,\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_v\} = 0.\end{aligned} \quad (12')$$

$$\begin{aligned}&\{\nu^2\overline{D} - \{\overline{I}\,\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\}\mathfrak{w}^2\}\mathfrak{w}\\ &\quad + \{\overline{I}\,\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}\\ &+ \overline{I}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\overline{D}) + \mathrm{div}\,\mathfrak{w}\{\overline{I}\,\mathrm{grad}\,D\\ &+ i\nu\,\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_v\} + i\nu 2(\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_g I)\mathfrak{w} = 0.\end{aligned} \quad (12'')$$

Sie entsprechen im Grenzfalle $\overline{I} = 0$ genau den Gleichungen (10′) und (10″) im § 4 der genannten Grundlegung, welche Beziehungen für elastische Verdünnungswellen gelten, wenn man von ihrer Nichtumkehrbarkeit absehen darf. Für homogene Körper gehen diese Ausdrücke dort und hier in die für Planwellen über. Wir haben also mit ihnen die Abweichungen für inhomogene Körper zur Darstellung gebracht. Sie geben die Grundlage für das Studium der Verdünnungswellen in der Erde und in der Atmosphäre. Davon wird später noch im einzelnen zu handeln sein.

Gießen, im Juni 1916.

(Eingegangen 24. Juni 1916.)

Flüssige Kristalle und anisotrope Flüssigkeiten. (Nachtrag.)

Von W. Voigt.

Herr Fr. Krüger hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß in meinem Bericht (diese Zeitschr. **17**, 76—87, 128—135, 152—161, 1916) über den in der Überschrift bezeichneten Gegenstand eine zusammenhängende Gruppe (wohl ein „Jahrgang") von Abhandlungen unberücksichtigt geblieben ist. Wenngleich nun mein Vortrag sich nicht die absolute Vollständigkeit zum Ziel gesetzt hatte, sondern nur einen Überblick über das Gesamtgebiet der Erscheinungen (bei Bevorzugung der theoretisch faßbaren) und über die Entwickelung der zu ihrer Deutung herangezogenen Vorstellungen geben wollte[1]), so spreche ich doch gerne mein Bedauern über das Versehen aus, und will versuchen, durch diesen Nachtrag die gelassene Lücke auszufüllen.

Die Arbeiten von Neufeld[2]) und Krüger[3]), um die es sich in erster Linie handelt, stellen Fortsetzungen und Ergänzungen der am Ende von § 10 beschriebenen Beobachtungen von Bose über den Ausfluß anisotroper Flüssigkeiten aus Kapillarröhren bei normaler und bei turbulenter Strömung dar. Jene Beobachtungen waren durch die in § 9 auseinandergesetzte Schwarmhypothese veranlaßt und sollten speziell feststellen, ob nicht bei dem turbulenten Strömungsvorgang die Schwarmbildung beeinträchtigt und damit das Verhalten der aniso-

1) Zusatz bei der Korrektur. Herr O. Lehmann wendet sich neuerdings (diese Zeitschr. **17**, 241, 1916) gegen verschiedene Bemerkungen in meinem Vortrag. Es handelt sich dabei wesentlich um Prioritäts- und Auffassungsfragen, daneben auch um einige Mißverständnisse meiner Äußerungen, aber ich habe nicht den Eindruck, daß eine Diskussion darüber förderlich und allgemein interessant sein würde. Speziell sind Prioritätsfragen jederzeit und ganz besonders in dem vorliegenden Gebiet dornig. Ich habe mich nicht unterfangen, sie für irgend einen der strittigen Punkte zu lösen, und meine bei der Schilderung der historischen Entwicklung unserer Kenntnisse und Vorstellungen hier und da gemachten Äußerungen über Autorschaften wollen nur die unmaßgebliche Ansicht ausdrücken, die ich mir auf Grund der Publikationen gebildet habe.

2) M. W. Neufeld, diese Zeitschr. **14**, 646, 1913; Diss. Danzig 1913.

3) Fr. Krüger, diese Zeitschr. **14**, 651, 1913.

tropen Phase demjenigen der isotropen näher gebracht würde. Die von Bose gefundene Tatsache, daß der „Sprung", den die Ausflußzeit normaler Strömung beim Übergang von der *a*- zu der *i*-Phase zeigt, bei turbulenter Strömung geringer wird, wurde von Bose als eine Stütze der Schwarmhypothese angesehen; aber ich habe a. a. O. schon ein gewisses Bedenken gegen die Sicherheit dieses Schlusses geltend gemacht.

Neufeld hat nun auf Krügers Veranlassung die Boseschen Beobachtungen wieder aufgenommen und sie besonders auch auf das isotrope Gebiet ausgedehnt. Die Anregung hierzu gaben Untersuchungen von Willers[1]) über die Abhängigkeit der Ausflußzeit bei Emulsionen von Temperatur und Druck. Diese Beobachtungen lieferten für die Isobaren (Ausflußzeit bei konstantem Druck als Funktion der Temperatur dargestellt unter Reduktion auf gleiche Ordinaten beim Klärungspunkt) für den Klärungspunkt selbst eine deutliche nach oben gerichtete Spitze, mit einem ungefähr gleichen Abfall nach beiden Seiten hin. Dieser Abfall erwies sich um so stärker, je geringer der Druck und somit die Geschwindigkeit war, mit denen der Ausfluß geschah. Es bestand nun zwischen diesen und den Boseschen Resultaten eine gewisse Verwandtschaft; insbesondere wenn man die Unstetigkeit der Ausflußzeit beim Übergang von der *a*- zur *i*-Phase nur als scheinbar ansah und den größeren Sprung als einen Anstieg von größerer Steilheit auffaßte, konnte man in dem Verhalten der *a*-Phase ein Analogon zu demjenigen der Emulsion unterhalb des Klärungspunktes sehen. Oberhalb des Klärungspunktes versagte anscheinend diese Analogie; Bose hat dort (für die *i*-Phase) eine Abhängigkeit des Abfalles der Ausflußgeschwindigkeit vom Druck nicht erwartet und aus seinen wenigen Beobachtungen in diesem Gebiet auch nicht geschlossen. Neufeld hat nun aber durch Beobachtungen mit Anisaldazin und *p*-Azoxyanisol gezeigt, daß bei diesen Körpern doch eine solche Abhängigkeit vorhanden ist. Da in der *i*-Phase nach Bose Schwärme nicht anzunehmen sind, so erscheint die Anwendung der Schwarmhypothese zur Erklärung des in gewisser Hinsicht analogen Phänomens innerhalb der *a*-Phase auch nicht als zwingend nötig.

Krüger vertritt den Standpunkt, daß in beiden Fällen eine ganz allgemeine hydrodynamische Eigentümlichkeit zur Geltung komme. Nach Beobachtungen von Sorkau[1]) über Ausflußgeschwindigkeiten bei turbulenter Strömung, um deren Deutung sich Schaefer und Frankenberg[2]) wie auch Mie[3]) bemüht haben, scheint für einfache Flüssigkeiten allgemein der Abfall der Ausflußzeit mit steigender Temperatur abzunehmen, wenn der Druck und damit die Turbulenz zunimmt. Dieser Regel würde sich das Verhalten sowohl der *i*-Phase, als der Emulsionen oberhalb des Klärungspunktes ohne weiteres fügen. Das Verhalten der *a*-Phase und der Emulsionen unterhalb des Klärungspunktes, stimmt aber damit nur dann, wenn man dort den Abfall mit fallender Temperatur anstatt desjenigen mit steigender setzt, und das erscheint nicht so ganz befriedigend. Allerdings ist für einige *a*-Phasen, die ein genügend ausgedehntes Existenzbereich besitzen, bei niedrigeren Temperaturen ein Abfall der Isobaren mit steigender Temperatur beobachtet (s. dazu Ende von § 5), aber es ist m. E. keineswegs selbstverständlich, daß mit einem langsameren Abfall dort ein langsamerer Anstieg zum Klärungspunkt notwendig verbunden ist. So bleibt m. E. immer noch ein unerklärter Rest übrig.

Neufeld hat die Ausflußbeobachtungen noch nach zwei anderen Richtungen über das von seinem Vorgänger bearbeitete Gebiet hinaus erweitert. Einerseits hat er die Weite der benutzten Kapillaren stark variiert, um festzustellen, wie dieselbe auf die Isobaren der Ausflußzeiten einwirke. Bose hatte erwartet, daß bei Röhren von wachsenden Weiten, bis zu solchen, die viel größer wären, als die Molekülschwärme, der Übergang von normaler Strömung zu Turbulenz und die Steigerung der letzteren sich immer weniger im Verlauf der Isobaren der Ausflußzeit ausdrücken und bei größten Weiten schließlich verschwinden möchte. Neufelds Beobachtungen gaben nichts dergleichen. Ferner hat er die Ausflußkapillare einem transversalen Magnetfeld ausgesetzt, um zu erproben, ob dessen nach § 11 die Moleküle orientierende Wirkung den Verlauf der inneren Reibung beeinflusse. Auch das Ergebnis dieser Versuche war negativ. Krüger schließt aus beiden Reihen, daß die Boseschen Schwärme sehr klein auch gegen die kleinsten benutzbaren Rohrweiten seien und daher bei dem Vorgang der inneren Reibung überhaupt nicht merklich mitwirkten.

Es ist sehr wohl zuzugeben, daß nach diesen

1) Fr. A. Willers, diese Zeitschr. **10**, 244, 1909.

1) W. Sorkau, diese Zeitschr. **12**, 582, 1911; **13**, 805, 1912.
2) Cl. Schäfer u. G. Frankenberg, diese Zeitschr. **14**, 89, 1913.
3) G. Mie, diese Zeitschr. **14**, 93, 1913.

Ergebnissen in den Beobachtungen über innere Reibung Stützen für die Schwarmhypothese nicht zu finden sind. Freilich liefern sie, samt den daran geknüpften Überlegungen, auch keinen Fortschritt in der Deutung der speziellen Erscheinungen im Bereiche des Überganges von anisotroper zu isotroper Phase.

Göttingen, Anfang Juni 1916.

(Eingegangen 19. Juni 1916.)

Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle. II. Einfluß der Absolutwerte der dielektrischen Momente auf die beobachtbaren Erscheinungen [1]).

Von W. Voigt.

7. Es ist bekannt, daß Lord Kelvin den Kristallen derjenigen Gruppen, die eine einzelne ausgezeichnete Richtung von polarem Charakter besitzen, ein permanentes elektrisches Moment beigelegt hat, das, solange der Kristall nicht mechanisch oder thermisch beeinflußt wird, durch eine auf seiner Oberfläche influenzierte Ladung bzw. seiner Wirkung kompensiert bleibt. Die Wirkung einer thermischen oder mechanischen Veränderung kommt dann auf eine doppelte Weise zustande. Einerseits hört u. U. bei einer Deformation des Kristalls aus rein geometrischen Gründen die an der Oberfläche (für einige Zeit wenigstens) festhaftende Ladung auf, das innere Moment zu kompensieren. Andererseits verändert jener Eingriff in physikalischer Weise, d. h. durch bestimmte Vorgänge in der Kristallsubstanz, deren spezifisches Moment derart, daß, wenn man auch jene geometrischen Veränderungen aufheben könnte, doch die Oberflächenladung keine Kompensierung mehr liefern würde.

Diese zwei wesentlich verschiedenen Wirkungen, die auch weiter als „geometrische" und „physikalische" bezeichnet werden mögen, haben jede für sich ein spezifisches Interesse, und es wäre von Bedeutung, wenn es gelänge, sie durch die Beobachtung getrennt zu messen. Insbesondere würde die erstere Wirkung einen Rückschluß auf die Größe des ursprünglichen Momentes gestatten, dessen Kenntnis an sich und ganz besonders in Verbindung mit der molekularen Theorie der Pyro- und Piezoelektrizität Wichtigkeit besitzt.

Wir sind über diesen „Absolutwert" des spezifischen elektrischen Moments von pyroelektrisch erregbaren Kristallen bisher keineswegs zuverlässig informiert. Eine orientierende Beobachtung, die ich vor langer Zeit angestellt habe [1]), und die an die scheinbare Ladung auf einer frischen Bruchfläche eines Turmalinkristalls anknüpfte, liefert vermutlich das Vorzeichen richtig, gibt aber selbst über die Größenordnung keine Sicherheit, weil man nicht wissen kann, welche Vorgänge sich im Moment des Zerbrechens des Kristalls abspielen. Die bekannte Erscheinung des Leuchtens von Zuckerkristallen beim Zertrümmern legt die Vorstellung von Entladungen hoher Spannungen nahe, und solche würden natürlich einer nachträglichen Messung der scheinbaren Ladungen auf den Bruchflächen den größten Teil ihrer Bedeutung nehmen. Um so wichtiger wäre es, wenn es gelänge, aus Beobachtungen über pyro- und piezoelektrische Erregungen quantitative Schlüsse auf das primäre Moment zu ziehen.

Ich habe diese Frage bei Aufstellung der phänomenologischen Theorie der polaren Erregungen ausführlich behandelt und schließlich gezeigt [2]), daß allerdings das anfängliche Moment an den beobachtbaren Erscheinungen Anteil hat, daß aber dieser (geometrische) Anteil sich der Wirkung der physikalischen Änderung des innern Moments so verbindet, daß man ihn durch die Beobachtung nicht absondern kann. Die analoge bedeutungsvolle Frage bietet sich nun auch bei den zentrischen Erregungen, und ihre Bearbeitung bildet den Hauptteil der nachstehenden Untersuchung. Es sei im voraus bemerkt, daß das Resultat der Theorie hier wesentlich von dem für azentrische Erregungen gefundenen abweicht. Wegen bestimmter Zusammenhänge sollen einleitend die dielektrischen Momente erster und zweiter Ordnung aus den Vorstellungen der Gittertheorie abgeleitet werden.

8. Eine Formulierung der Momente erster Ordnung auf Grund der Gitterannahme hat Herr Born [3]) folgendermaßen gegeben.

Die Koordinaten x_k, y_k, z_k der Pole e_k eines Elementarparallelepipeds (kurz eines „Elementes") des Kristalls, für welche gilt

$$\Sigma e_k = 0, \qquad (34)$$

läßt er durch die Deformation verändert werden nach dem Schema

$$x_k' = x_k + u_k + x_k u_x + y_k u_y + z_k u_z, \ldots \qquad (35)$$

Hierin sind die $u_k, \ldots$ der Polart (k) individuell und für alle Elemente gleich; sie stellen also eine gegenseitige Verschiebung der Gitter (k) ohne

1) Numerierung der Paragraphen und Formeln schließen sich der Bequemlichkeit halber an die frühere Arbeit (diese Zeitschr. 17, 287—293, 1916) an.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 60, 368, 1897.

2) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig u. Berlin, 1910, S. 842.

3) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig und Berlin, 1913, S. 23 u. 36.

Deformation dar. Die drei letzten Glieder jeder Formel, in denen

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots \quad (36)$$

Differentialquotienten der Komponenten eines im Raume stetigen „Verschiebungsvektors" $\mathfrak{v}$ bezeichnen, geben hingegen eine Deformation des Polsystems eines Elements von derselben Natur, als wäre der Kristall ein Kontinuum, und wären die Pole in diesem markierte Punkte.

Nach den Bornschen Entwicklungen sind die $u_k, \ldots$ lineare Funktionen der sogenannten „Deformationsgrößen"

$$u_x = x_x, v_y = y_y, w_z = z_z, w_y + v_z = y_z, \\ u_z + w_x = z_x, v_x + u_y = x_y; \quad (37)$$

das konstante Glied darf als eine Funktion der Temperatur betrachtet werden und stellt somit eine gegenseitige Verschiebung der verschiedenen Atomgitter dar, die bei verhinderten Deformationen als eine reine Wirkung der Temperaturänderung eintritt und die sog. wahre Pyroelektrizität bedingt. Die Temperaturabhängigkeit der übrigen Parameter wird nicht ausgeschlossen; dieselbe drückt aber nur die Temperaturabhängigkeit der Piezoelektrizität und damit eine Erscheinung aus, die hier nicht in Betracht gezogen werden soll.

Die vorstehenden Festsetzungen unterscheiden sich formal von den Bornschen darin, daß bei jenen die wirklichen Längen (Koordinaten, Verschiebungen) aus den vorstehend eingeführten erst durch Anbringung eines gewissen Faktors (δ) entstehen. Dieser Faktor bedeutet aber für unsere Untersuchungen nur eine unnötige Komplikation der Formeln und ist daher im folgenden mit Eins vertauscht.

Für ein Element erhält man nunmehr die Komponenten des ursprünglichen Moments erster Ordnung $\mathfrak{p}^0$ gegeben durch

$$\mathfrak{p}^0{}_x = \Sigma e_k x_k, \ldots, \quad (38)$$

die des veränderten durch

$$\mathfrak{p}_x{}' = \mathfrak{p}_x{}^0 (1 + u_x) + \mathfrak{p}_y{}^0 u_y + \mathfrak{p}_z{}^0 u_z + \mathfrak{p}_x, \ldots \quad (39)$$

bei

$$\mathfrak{p}_x = \Sigma e_k u_k.$$

Sind in der Volumeneinheit ζ Elemente vorhanden, so setzt Herr Born deren Moment für den ursprünglichen Zustand

$$\mathfrak{P}^0 = \zeta \mathfrak{p}^0 \quad (40)$$

und ebenso für den neuen $(\mathfrak{P}) = \zeta \mathfrak{p}'$. Letzteres ist aber offenbar unrichtig, und die Verwendung dieses Wertes würde uns weiterhin auf wesentlich falsche Bahn leiten. Die Anzahl der Elemente in der Volumeneinheit wird nämlich durch die Deformation, wenn δ die räumliche Dilatation bezeichnet, im Verhältnis $(1 \doteq \delta) : 1$ verkleinert, und somit ist

$$(\mathfrak{P}) = \zeta \mathfrak{p}' (1 - \delta), \quad (41)$$

d. h. bis auf Glieder erster Ordnung

$$(\mathfrak{P})_x = \mathfrak{P}_x{}^0 (1 + u_x - \delta) + \mathfrak{P}_y{}^0 u_y + \mathfrak{P}_z{}^0 u_z + \mathfrak{P}_x, \ldots \quad (42)$$

bei $\mathfrak{P}_x = \zeta \mathfrak{p}_x$. Hierin bezeichnen wie die $\mathfrak{p}_x, \ldots$ auch die $\mathfrak{P}_x, \ldots$ lineäre Funktionen der Deformationsgrößen, deren konstantes Glied die Temperatur enthält. —

Die Komponenten des ursprünglichen Moments zweiter Ordnung für ein Element bestimmen sich analog zu (38) durch

$$\pi_{xx}{}^0 = \Sigma e_k x_k{}^2, \ldots \quad \pi_{yz}{}^0 = \Sigma e_k y_k z_k, \ldots \quad (43)$$

die des veränderten durch

$$\pi_{xx}{}' = \Sigma e_k x_k{}'^2, \ldots \quad \pi_{yz}{}' = \Sigma e_k y_k{}' z_k{}', \ldots, \quad (44)$$

wobei die $x_k', \ldots$ durch (35) definiert sind. Sieht man die $u_k, \ldots$ und auch die $u_x, \ldots$ als kleine Größen erster Ordnung an, so schreibt sich bis auf diese Ordnung

$$\pi_{xx}{}' = \pi_{xx}{}^0 + 2 (\pi_{xx}{}^0 u_x + \pi_{xy}{}^0 u_y + \pi_{xz}{}^0 u_z) \\ + \pi_{xx}, \ldots, \\ \pi_{yz}{}' = \pi_{yz}{}^0 + \pi_{xz}{}^0 v_x + \pi_{yz}{}^0 v_y + \pi_{zz}{}^0 v_z \\ + \pi_{xy}{}^0 w_x + \pi_{yy}{}^0 w_y + \pi_{zy}{}^0 w_z + \pi_{yz}, \ldots, \quad (45)$$

wobei

$$\pi_{xx} = 2 \Sigma e_k u_k x_k, \ \pi_{yz} = \Sigma e_k (v_k z_k + w_k y_k), \ldots \quad (46)$$

nach dem zu (35) Gesagten lineäre Funktionen der Deformationsgrößen darstellen, deren konstantes Glied die Temperatur enthält.

Für die Volumeneinheit folgt für den ursprünglichen Zustand das Moment

$$\Pi^0 = \zeta \pi^0, \text{ also } \Pi_{xx}{}^0 = \zeta \pi_{xx}{}^0, \ldots \quad (47)$$

für den veränderten Zustand analog zu (41)

$$(\Pi) = \zeta \pi' (1 - \delta), \text{ also } (\Pi)_{xx} = \zeta \pi_{xx}{}' (1 - \delta), \ldots \quad (48)$$

was sich bis auf Glieder erster Ordnung schreibt

$$(\Pi)_{xx} = \Pi_{xx}{}^0 (1 - \delta) + 2 (\Pi_{xx}{}^0 u_x + \Pi_{xy}{}^0 u_y \\ + \Pi_{xz}{}^0 u_z) + \Pi_{xx}, \ldots \quad (49) \\ (\Pi)_{yz} = \Pi_{yz}{}^0 (1 - \delta) + \Pi_{xz}{}^0 v_x + \Pi_{yz}{}^0 v_y + \Pi_{zz}{}^0 v_z \\ + \Pi_{xy}{}^0 w_x + \Pi_{yy}{}^0 w_y + \Pi_{zy}{}^0 w_z + \Pi_{yz}, \ldots$$

Die $\Pi_{xx} = \zeta \pi_{xx}, \ldots \ \Pi_{yz} = \zeta \pi_{yz} \ldots$ haben dabei dieselbe Natur, wie sie bez. der $\pi_{xx}, \ldots$ oben ausgesprochen ist.

9. Wir wenden uns nun zur Untersuchung der im Eingang formulierten allgemeinen Frage, auf welche Weise jene ursprünglich die innern Momente des Kristalls kompensierende Oberflächenladung sich nach thermischer oder mechanischer Einwirkung auf den Kristall noch Einfluß ausübt, insbesondere, inwieweit ihr Vorhandensein auch im neuen Zustand die ursprünglichen oder absoluten Momente unerkenn-

bar macht, derart, daß dieselben einer quantitativen Bestimmung entzogen werden. Diese Untersuchung soll hier zunächst für den Fall polarer Erregung durchgeführt werden, und zwar erst ungefähr in der von mir früher mitgeteilten Weise, sodann (aus einem bestimmten Grunde) auch im Anschluß an den vorstehend reproduzierten Bornschen Ansatz. Die grundlegenden allgemeinen Formeln sind für beide Entwicklungen dieselben.

Im ursprünglichen Zustand ist die Erregung homogen; es gilt somit für die Potentialfunktion statt der allgemeinen Formel (19)

$$\psi_1 = \int \mathfrak{P}_n \frac{do}{r} - \int \operatorname{div} \mathfrak{P} \frac{dk}{r} \qquad (19)$$

nunmehr

$$\psi_1^0 = \int \mathfrak{P}^0_{n^0} \frac{do}{r}, \qquad (50)$$

wobei $\mathfrak{P}^0$ das anfängliche Moment der Volumeneinheit und n^0 die anfängliche (äußere) Normalenrichtung mit den Kosinus α^0, β^0, γ^0 bezeichnet. Die kompensierende Oberflächenladung hat somit die Dichte

$$\sigma^0 = -\mathfrak{P}^0_{n^0}. \qquad (51)$$

Im deformierten Zustand gelte für die Wirkung der innern Erregung

$$\psi_1 = \int (\mathfrak{P})_n \frac{do}{r} - \int \operatorname{div}(\mathfrak{P}) \frac{dk}{r}, \qquad (52)$$

worin $(\mathfrak{P})$ das ganze im zweiten Zustand vorhandene Moment der Volumeneinheit bezeichnet. Ihm entsprechen die Dichten

$$(\sigma) = (\mathfrak{P})_n, \quad (\varrho) = -\operatorname{div}(\mathfrak{P}). \qquad (53)$$

(ϱ) kommt vollständig zur Geltung; (σ) aber ist in seiner Wirkung zum Teil durch den Einfluß der an der Oberfläche haftenden und die ursprüngliche Erregung kompensierenden Dichte σ^0 neutralisiert. Doch kommt letztere nicht voll zur Geltung. Erfährt nämlich das Oberflächenelement do eine Dilatation ϑ, so kommt statt σ^0 nur $\sigma^0(1-\vartheta)$ zur Wirkung.

Hiernach sind die faktisch wirksamen Dichten σ' und ϱ' gegeben durch

$$\sigma' = (\mathfrak{P})_n - \mathfrak{P}^0_n(1-\vartheta), \varrho' = -\operatorname{div}(\mathfrak{P}). \qquad (54)$$

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob in diesen Ausdrücken ein Anteil von $\mathfrak{P}^0$ übrig bleibt, und ob er sich von den physikalischen Wirkungen der Deformation und Temperaturänderung durch die Beobachtung sondern läßt. Ich bespreche nun, wie gesagt, zunächst die von mir benutzte Betrachtungsweise.

Mein Ansatz geht dahin,

$$(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}^0) + \mathfrak{P} \qquad (55)$$

zu setzen, wobei $(\mathfrak{P}^0)$ dasjenige Moment bezeichnet, das aus $\mathfrak{P}^0$ rein durch die geometrischen Veränderungen der Gestaltung des Kristalls entsteht, und $\mathfrak{P}$ das physikalisch Neue umfaßt. Die geometrischen Veränderungen bestehen in einer räumlichen Dilatation δ, die $\mathfrak{P}^0$ im Verhältnis $(1-\delta):1$ verkleinert, und in einer Drehung $\mathfrak{d}$, die den Zuwachs $[\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{P}^0]$ liefert. Es gilt demgemäß

$$(\mathfrak{P}^0) = \mathfrak{P}^0(1-\delta) + [\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{P}^0]. \qquad (56)$$

$\mathfrak{P}$ ist nach Früherem eine lineare Funktion der Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$, deren „konstantes" Glied die Temperatur enthält und die „wahre" Pyroelektrizität veranlaßt. Da

$$\vartheta = \delta - \Delta \qquad (57)$$

ist[1]), wobei Δ die lineare Dilatation in der Richtung normal zu do bezeichnet, so hat man zunächst aus (54), (55) und (56) bis auf Größen erster Ordnung

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n^0 \Delta + [\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{P}^0]_n + \mathfrak{P}_n^0 - \mathfrak{P}^0_{n^0}. \qquad (58)$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{P}_n^0 - \mathfrak{P}^0_{n^0} = \mathfrak{P}_x^0(\alpha-\alpha^0) + \mathfrak{P}_y^0(\beta-\beta^0) + \mathfrak{P}_z^0(\gamma-\gamma^0) \qquad (59)$$

und nach bekannten Formeln[1])

$$\alpha - \alpha^0 = \alpha\Delta - (\alpha u_x + \beta v_x + \gamma w_x), \ldots \qquad (60)$$

wobei u_x, v_x, ... die in (36) festgestellte Bedeutung haben.

Man kann also, falls man das Symbol grad nur auf $\mathfrak{v}$ bezieht, setzen

$$\mathfrak{P}_n^0 - \mathfrak{P}^0_{n^0} = \mathfrak{P}_n^0\Delta - (\mathfrak{P}^0\cdot\operatorname{grad}(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v})), \qquad (61)$$

und erhält damit

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n + [\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{P}^0]_n - (\mathfrak{P}^0\cdot\operatorname{grad}(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v})). \qquad (62)$$

Hieraus folgt nach einfacher Zusammenziehung bei Einführung des Tensortripels T der Deformation mit den Komponenten

$$T_{xx} = u_x = x_x, \ldots T_{yz} = \frac{1}{2}(v_z + w_y) = \frac{1}{2} y_z, \qquad (63)$$

schließlich

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n - [T\cdot\mathfrak{P}^0]_n. \qquad (64)$$

Für die wirksame Raumdichte liefert (54), (55) und (56)

$$\varrho' = \operatorname{div}\mathfrak{P} + \operatorname{div}\{\mathfrak{P}^0(1-\delta)\} + \operatorname{div}[\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{P}^0]. \qquad (65)$$

Nun ist aber div $\mathfrak{P}^0 = 0$, somit

$$\operatorname{div}\{\mathfrak{P}^0(1-\delta)\} = -(\mathfrak{P}^0\cdot\operatorname{grad}\delta), \qquad (66)$$

und wegen $\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ und $\operatorname{div}\mathfrak{v} = \delta$

$$\operatorname{div}[\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{P}^0] = \frac{1}{2}\{(\mathfrak{P}^0\cdot\operatorname{grad}\delta) - (\mathfrak{P}^0\cdot\mathfrak{v}\Delta)\}.$$

Dies liefert zusammen

$$\varrho' = \operatorname{div}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}(\mathfrak{P}^0\cdot\{\operatorname{grad}\delta + \mathfrak{v}\Delta\})$$

---

1) S. z. B. W. Voigt, Kristallphysik S. 171 u. f.

und bei einfachem Umordnen des zweiten Termes

$$\varrho' = \operatorname{div}\{\mathfrak{P} - [T \cdot \mathfrak{P}^0]\}. \qquad (67)$$

Die Formeln (64) und (67) ergeben, daß in σ' und ϱ' das ursprüngliche Moment $\mathfrak{P}^0$ sich dem neuen $\mathfrak{P}$ in derselben Weise, nämlich zu einem „wirksamen" Moment $\mathfrak{P}'$ verbindet, gegeben durch

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - [T \cdot \mathfrak{P}^0], \qquad (68)$$

dessen Komponenten also lauten

$$\mathfrak{P}_x' = \mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x^0 x_x + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_y^0 x_y + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_z^0 x_z), \ldots (69)$$

Da die Zusatzglieder linear homogen in den Deformationsgrößen sind, so verschmelzen sie sich völlig mit den physikalischen Erregungen $\mathfrak{P}_x, \ldots$ und lassen sich durch die Beobachtung von ihnen nicht trennen. —

Herr Born verfolgt den von ihm aus der Gittertheorie abgeleiteten Ansatz für $\mathfrak{P}$ nicht näher; er bezieht sich einfach auf das von mir (wie vorstehend gezeigt) gewonnene Resultat, daß die in (56) explizit, in (42) in den $u_x, \ldots$ implizit auftretende Drehung $\mathfrak{d}$ aus den „wirksamen" Momenten verschwindet. Indes würde eine Rechnung mit seinem Ansatz zu dem genannten Ziele nicht geführt haben, es hätte sich dabei vielmehr die zu (41) monierte Vernachlässigung des Einflusses der räumlichen Dilatation geltend gemacht. Deshalb halte ich es für angemessen, die allgemeinen Formeln (54) direkt auf den berichtigten Bornschen Ansatz (42) anzuwenden und zu zeigen, wie aus diesem wirklich das genannte Resultat folgt.

Schreibt man für (41) bzw. (42)

$$(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^0 + \overline{\mathfrak{P}}, \qquad (70)$$

so ist

$$\overline{\mathfrak{P}}^0 = \mathfrak{P}^0(1 - \delta) + (\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad})\mathfrak{v}, \qquad (71)$$

nämlich

$$\mathfrak{P}_x^0 = \mathfrak{P}_x^0(1 - \delta) + \mathfrak{P}_x^0 u_x + \mathfrak{P}_y^0 u_y + \mathfrak{P}_z^0 u_z, \ldots$$

Das von $\mathfrak{P}^0$ abhängige Glied $\overline{\mathfrak{P}}^0$ enthält also nicht nur, wie $(\mathfrak{P}^0)$ in (55) bez. (56), die Wirkung der räumlichen Dilatation und der Drehung des Raumelementes, sondern auch noch die Wirkung der Kontinuumsdeformation von S. 308. Und $\overline{\mathfrak{P}}$ enthält nicht die Wirkung der Gesamtdeformation, wie $\mathfrak{P}$ in (55), sondern nur diejenige der relativen Verschiebung der verschiedenen Polgitter (k). Die Zerlegung von $(\mathfrak{P})$ in (70) ist also wesentlich verschieden von der in (55).

Im übrigen sind die wirksamen Dichten σ' und ϱ' nach den Formeln (54) zu berechnen. An Stelle von (62) gilt jetzt demnach

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n^0 \Delta + (\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad})\mathfrak{v}_n + \mathfrak{P}_n^0 - \mathfrak{P}_n^0, \qquad (72)$$

und wegen (61)

$$\sigma' = \overline{\mathfrak{P}}_n. \qquad (73)$$

Analog findet man aus (71)

$$\varrho' = \operatorname{div}\{\mathfrak{P}^0(1 - \delta)\} + \operatorname{div}\{(\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad})\mathfrak{v}\} + \operatorname{div}\overline{\mathfrak{P}};$$

also wegen (66) und wegen

$$\operatorname{div}\{(\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad})\mathfrak{v}\} = (\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad}\delta),$$

schließlich

$$\varrho' = \operatorname{div}\overline{\mathfrak{P}}. \qquad (74)$$

Somit ergibt sich in der Tat aus dem berichtigten Bornschen Ansatz das sehr merkwürdige Resultat, daß von der gesamten Erregung des Kristalls nur derjenige Anteil elektrisch wirksam ist, der auf der gegenseitigen Verschiebung der Polgitter (k) beruht, während der auf der Kontinuums-Deformation beruhende, für sich keineswegs verschwindende Anteil gerade durch die „geometrische" Veränderung der Oberflächenladung kompensiert wird. Dieses Ergebnis ist eine überraschende und eigenartige Frucht der Gittertheorie, das hervorgehoben zu werden verdient.

Das einzig wirksame Moment $\overline{\mathfrak{P}}$ ist durch

$$\overline{\mathfrak{P}}_x = \xi \mathfrak{p}_x = \xi \Sigma e_k u_k, \ldots$$

definiert, und die $u_k, \ldots$ sind nach S. 308 lineare Funktionen der Deformationsgrößen, deren konstantes Glied die Temperatur enthält; dies letztere ist der Ausdruck der „wahren" Pyroelektrizität, deren Auftreten also davon abhängt, ob eine Dislokation der Polgitter relativ zueinander durch eine bloße Temperaturwirkung bei aufgehobener Deformation möglich ist. Es scheint, wenn die Symmetrieverhältnisse des Kristalls die geeigneten sind, prinzipiell eine solche Dislokation durchaus möglich und demgemäß dürfte von seiten der Gittertheorie ein Argument gegen die Existenz der viel umstrittenen wahren Pyroelektrizität nicht geboten werden.

10. Gehen wir nun zu der Frage über, inwieweit bei den zentrischen Erregungen, die den hauptsächlichen Gegenstand dieser Mitteilung bilden, die anfänglichen Momente auf die beobachtbaren Erscheinungen influieren, so ist hierbei an die Formel (21) der I. Arbeit

$$\psi_2 = \int [H \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, do - \int \operatorname{div}_n H \frac{do}{r} + \int \operatorname{div}^2 H \frac{dk}{r} \qquad (21)$$

anzuknüpfen, die das Potential des Kristalls zerlegt in die Wirkungen einer doppelten und einer einfachen Flächenbelegung, sowie einer räumlichen Verteilung. Da die letzteren beiden Funktionen nur von räumlichen Differentialquotienten der Momente $H_{xx}, \ldots$ abhängen, so fehlen sie im ursprünglichen Zustand; hier kommt also nur der Ausdruck

$$\psi_2^0 = \int [[H^0 \cdot \mathfrak{n}^0] \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}] do = \int (\mathfrak{R}^0 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}) do$$

zur Geltung bei (75)

$$[H^0 \cdot \mathfrak{n}^0]_x = \mathfrak{R}_x^0 = H_{xx}^0 \alpha^0 + H_{xy}^0 \beta^0 + H_{xz}^0 \gamma^0 .$$

Die Abkürzung $\mathfrak{R}$ ist die in § 4 benutzte für das „Moment" der Doppelbelegung.

Die Influenzladung des Kristalls, welche in Wahrheit die durch ψ_2^0 ausgedrückte Wirkung kompensiert, wird vermutlich eine einfache Oberflächenbelegung sein; da aber das Gesetz einer solchen allgemein nicht angebbar ist, wollen wir dafür eine äquivalente Doppelbelegung von der durch $\mathfrak{R}^0$ ausgedrückten Art, aber von entgegengesetztem Vorzeichen einführen, was unzweifelhaft zulässig ist.

Im deformierten Zustande bedingen die veränderten inneren Momente (H) eine Doppelbelegung von dem geänderten Moment

$$(\mathfrak{R}) = [(H) \cdot \mathfrak{n}] , \qquad (76)$$

bei

$$[(H) \cdot \mathfrak{n}]_x = (\mathfrak{R})_x = (H)_{xx}\alpha + (H)_{xy}\beta + (H)_{xz}\gamma , \ldots$$

Das wirksame Moment $\mathfrak{R}'$ setzt sich aus den Wirkungen von $(\mathfrak{R})$ und dem, was aus $-\mathfrak{R}^0$ infolge der geometrischen Veränderungen wird, zusammen. Bezüglich des letzteren dürfen wir annehmen, daß $-\mathfrak{R}^0$ am Oberflächenelement do haftet. Es wird daher einmal bei einer Dilatation von do im Betrage ϑ — analog wie dies S. 309 für die Dichte σ^0 benutzt ist — seinen Zahlwert im Verhältnis $(1-\vartheta) : 1$ verkleinern; sodann aber wird es als Vektorgröße an der Drehung $\mathfrak{d}$ von do teilnehmen und dadurch — analog wie das Moment $\mathfrak{P}^0$ auf S. 309 — den Zuwachs $-[\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{R}^0]$ erhalten. Es kommt sonach von $-\mathfrak{R}^0$ ein Anteil

$$-(\mathfrak{R}^0) = -\mathfrak{R}^0(1-\vartheta) - [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{R}^0]$$

zur Geltung, und das wirksame Moment $\mathfrak{R}'$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{R}' = (\mathfrak{R}) - \mathfrak{R}^0(1-\vartheta) - [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{R}^0] , \qquad (77)$$

bzw. durch

$$\mathfrak{R}_x' = (\mathfrak{R})_x - \mathfrak{R}_x^0(1-\vartheta) - [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{R}]_x , \ldots ,$$

wobei für die eingehenden Differenzen $\alpha - \alpha^0, \ldots$ wieder die Formeln (60) gelten. Die Formel (77) geht zu (54[1]) parallel.

Dies bezüglich des Einflusses des ersten Integrals in (21). Die beiden anderen Integrale drücken die Wirkung einer einfachen Oberflächenbelegung und einer räumlichen Verteilung aus von den bzw. Dichten

$$\sigma' = -\operatorname{div}_n(H) , \quad \varrho' = \operatorname{div}^2(H) , \qquad (78)$$

welche Ausdrücke zu (54[2]) parallel gehen.

Die Durchführung der Untersuchung soll nun wieder an die beiden im vorigen Abschnitt verfolgten Auffassungen anknüpfen.

Bei der ersten werde (H) zerlegt nach dem Schema

$$(H) = (H^0) + H , \qquad (79)$$

wobei (H^0) den Einfluß des ursprünglichen Moments in der geometrisch, d. h. durch Dilatation und Drehung des Volumenelements veränderten Stärke, H aber die physikalische Wirkung von Deformation und Temperaturänderung enthält. Die Komponenten $H_{xx}, \ldots$ sind dabei als lineare Funktionen der Deformationsgrößen zu betrachten, deren konstantes Glied die Temperatur enthält.

Für (H^0) liefert eine einfache geometrische Überlegung den Ausdruck

$$(H^0) = H^0(1-\delta) + 2[\mathfrak{d} \cdot H^0] , \qquad (80)$$

wobei wieder

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

ist, und nach der Definition (3′) des tensoriellen Produktes die Komponenten von (H^0) lauten

$$\begin{aligned} (H^0)_{xx} &= H_{xx}^0(1-\delta) + 2\{H_{xz}^0 \mathfrak{d}_y - H_{xy}^0 \mathfrak{d}_z\} , \ldots , \\ (H^0)_{yz} &= H_{yz}^0(1-\delta) + (H_{yy}^0 - H_{zz}^0)\mathfrak{d}_x \\ &\quad + H_{xz}^0 \mathfrak{d}_x - H_{xy}^0 \mathfrak{d}_y , \ldots \end{aligned} \qquad (81)$$

Der Ausdruck (77) für das wirksame Moment $\mathfrak{R}'$ nimmt hiernach die Form an

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' &= [H^0(1-\delta) \cdot \mathfrak{n}] + 2[[\mathfrak{d} \cdot H^0] \cdot \mathfrak{n}] \\ &\quad - [\mathfrak{d}[H^0 \cdot \mathfrak{n}]] + [H \cdot \mathfrak{n}] - (H^0 \cdot \mathfrak{n}^0)(1-\vartheta) , \end{aligned} \qquad (82)$$

und dies liefert wegen $\vartheta = \delta - \Delta$, wegen

$$\mathfrak{n} - \mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n}\Delta - \operatorname{grad}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})$$

im Sinne von (61) verstanden, und bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' &= [H \cdot \mathfrak{n}] + 2[[\mathfrak{d} \cdot H^0] \cdot \mathfrak{n}] - [\mathfrak{d}[H^0 \cdot \mathfrak{n}]] \\ &\quad - [H^0 \cdot \operatorname{grad}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})] , \end{aligned} \qquad (83)$$

eine Formel, die (62) ganz analog gebaut ist.

Die Zusammenziehung der letzten drei Glieder führt man am bequemsten für ein Koordinatensystem aus, dessen Achsen mit den Konstituenten H_1^0, H_2^0, H_3^0 des ursprünglichen Moments zusammenfallen, was nur eine formale Beschränkung enthält. Hier sind die sechs Komponenten von H^0 gleich H_1^0, H_2^0, H_3^0, o, o, o und diejenigen von $2[\mathfrak{d} \cdot H^0]$ nach (3′) bzw. gleich o, o, o, $(H_2^0 - H_3^0)\mathfrak{d}_x$, $(H_3^0 - H_1^0)\mathfrak{d}_y$, $(H_1^0 - H_2^0)\mathfrak{d}_z$; also wird

$$\begin{aligned} 2[[\mathfrak{d} \cdot H^0] \cdot \mathfrak{n}]_x &= (H_1^0 - H_2^0)\mathfrak{d}_z\beta + (H_3^0 - H_1^0)\mathfrak{d}_y\gamma , \\ [\mathfrak{d} \cdot [H^0 \cdot \mathfrak{n}]]_x &= H_3^0 \mathfrak{d}_y \gamma - H_2^0 \mathfrak{d}_z \beta , \ldots \\ [H^0 \cdot \operatorname{grad}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})]_x &= H_1^0(\alpha u_x + \beta v_x + \gamma w_x) , \ldots \end{aligned} \qquad (84)$$

und hieraus folgt wegen

$$\mathfrak{d}_z - v_x = -\frac{1}{2}x_y , \quad \mathfrak{d}_y + w_x = \frac{1}{2}x_z$$

sofort

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x' &= \alpha\{H_{xx} - H_1^0 x_x\} + \beta\left\{H_{xy} - H_1^0 \frac{1}{2}x_y\right\} \\ &\quad + \gamma\left\{H_{xz} - H_1^0 \frac{1}{2}x_z\right\} , \ldots \end{aligned} \qquad (85)$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{R}_y'$ und $\mathfrak{R}_z'$ folgen hieraus durch zyklische Vertauschung, und aus ihnen bildet sich dann $\mathfrak{R}'$ selbst.

Um σ' und ϱ' zu berechnen gehen wir aus von dem Vektor $\operatorname{div}(\Pi)$, der nach (79) und (80) lautet

$$\operatorname{div}(\Pi) = \operatorname{div}\{\Pi^0(1-\delta)\} + 2\operatorname{div}\tfrac{1}{4}\mathfrak{d}\cdot\Pi^0\mathfrak{I} + \operatorname{div}\Pi. \tag{86}$$

Da nach (8″) allgemein für das Produkt aus einem Tensor und einem Skalar gilt

$$\operatorname{div}\{S\,T\} = S\operatorname{div}T + [T\cdot\operatorname{grad}S],$$

und da Π^0 konstant ist, so ergibt (86)

$$\operatorname{div}(\Pi) = -[\Pi^0\cdot\operatorname{grad}\delta] + 2\operatorname{div}\tfrac{1}{4}\mathfrak{d}\cdot\Pi^0\mathfrak{I} + \operatorname{div}\Pi. \tag{87}$$

Weiter setzen wir die obige spezielle Lage des Koordinatensystems voraus und erhalten so

$$\operatorname{div}_x(\Pi) = \operatorname{div}_x\Pi - \Pi_1^0\frac{\partial\delta}{\partial x} + (\Pi_1^0 - \Pi_2^0)\frac{\partial\mathfrak{d}_z}{\partial y} + (\Pi_3^0 - \Pi_1^0)\frac{\partial\mathfrak{d}_y}{\partial z}. \tag{88}$$

Dies läßt sich auch in der zur Vergleichung mit [85] geeigneteren Form schreiben

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_x(\Pi) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left\{\Pi_{xx} - \Pi_1^0 x_x\right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\Pi_{xy} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_y - \Pi_2^0\mathfrak{d}_z\right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\Pi_{xz} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_z + \Pi_3^0\mathfrak{d}_y\right\};\end{aligned} \tag{89}$$

die Ausdrücke für $\operatorname{div}_y(\Pi)$ und $\operatorname{div}_z(\Pi)$ folgen hieraus durch zyklische Vertauschung, und mit ihnen auch $\sigma' = -\operatorname{div}_n(\Pi)$.

Endlich berechnet sich daraus $\varrho' = \operatorname{div}^2(\Pi)$ und das Resultat läßt sich zusammenziehen zu

$$\varrho' = \operatorname{div}^2\Pi - (\Pi_1^0\triangle x_x + \Pi_2^0\triangle y_y + \Pi_3^0\triangle z_z). \tag{90}$$

Um die Resultate der Gittertheorie zu verwerten, zerlegen wir das Gesamtmoment (Π) nach der Deformation gemäß den Ausdrücken (49) in zwei Teile

$$(\Pi) = (\overline{\Pi^0}) + \overline{\Pi}, \tag{91}$$

dabei ist

$$\begin{aligned}(\overline{\Pi^0})_{xx} &= \Pi_{xx}^0(1-\delta) + 2\{u_x\Pi_{xx}^0 + u_y\Pi_{xy}^0 + u_z\Pi_{xz}^0\}, \\ (\overline{\Pi^0})_{yz} &= \Pi_{yz}^0(1-\delta) + v_x\Pi_{xz}^0 + v_y\Pi_{yz}^0 + v_z\Pi_{zz}^0 \\ &\quad + w_x\Pi_{xz}^0 + w_y\Pi_{yy}^0 + w_z\Pi_{zy}^0, \ldots\end{aligned} \tag{92}$$

und die $\overline{\Pi}_{xx}, \ldots$ sind lineäre Funktionen der Deformationsgröße, deren konstantes Glied die Temperatur enthält. Nun kann man schreiben

$$\begin{aligned}(\Pi^0)_{xx} &= \Pi_{xx}^0(1-\delta) + 2\{\Pi_{zx}^0\mathfrak{d}_y - \Pi_{xy}^0\mathfrak{d}_z\} \\ &\quad + 2\Pi_{xx}^0 x_x + \Pi_{xy}^0 x_y + \Pi_{xz}^0 x_z; \ldots \\ (\Pi^0)_{yz} &= \Pi_{yz}^0(1-\delta) + (\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0)\mathfrak{d}_x \\ &\quad + \Pi_{xy}^0\mathfrak{d}_y + \Pi_{xz}^0\mathfrak{d}_z \\ &\quad + \Pi_{xz}^0\frac{1}{2}x_y + \Pi_{yz}^0 y_y + \Pi_{zz}^0\frac{1}{2}z_y \\ &\quad + \Pi_{xy}^0\frac{1}{2}x_z + \Pi_{yy}^0\frac{1}{2}y_z + \Pi_{zy}^0 z_z, \ldots\end{aligned} \tag{93}$$

Dabei sind die Glieder der ersten bez. der ersten und zweiten Reihe identisch mit den Komponenten $(\Pi^0)_{xx}, \ldots$ in (81), die übrigen sind lineäre Funktionen der Deformationsgrößen, die sich mit $\overline{\Pi}_{xx}, \ldots$ zusammenfassen lassen, so daß hiermit die Zerlegung (91) unmittelbar in die frühere (79) übergeführt werden kann. Ein Grund, irgend einen weiteren Teil der Rechnung mit den nur formal verschiedenen Ausdrücken zu wiederholen, liegt hier (ungleich dem analogen Fall bei polarer Erregung) nicht vor. Es genügt, die Diskussion an die relativ einfacheren Ausdrücke (85), (89) und (90) anzuknüpfen.

11. Die für die Momente zweiter Ordnung erhaltenen Resultate weichen nach ihrem Charakter von denen für die Momente erster Ordnung gefundenen vollständig ab. Zunächst lassen sich die Ausdrücke für die wirksamen Dichten $\mathfrak{R}'$, σ', ϱ' gar nicht auf dieselben Funktionen der Deformationen zurückführen. Sieht man auch von der nur formalen Zusammenziehung der Funktion $\operatorname{div}^2\Pi$ in (90) ab, so sind doch die Ausdrücke (85) und (89) durch das Auftreten der Drehung $\mathfrak{d}$ in den letzteren fundamental verschieden. Sodann aber sind die $\{\}$-Ausdrücke in beiden Gleichungen nicht sechs an der Zahl, sondern neun. Die Dichten $\mathfrak{R}'$ und σ' der gesamten wirksamen Oberflächenladungen erscheinen dort also nicht durch je ein symmetrisches Tensortripel bestimmt, sondern durch ein unsymmetrisches, dergl. sich nach dem S. 288, Anm. 1 Bemerkten in ein symmetrisches Tripel und einen Vektor zerlegen läßt.

Für die Diskussion können wir von den Ausdrücken für $\operatorname{div}_x(\Pi), \ldots$ ausgehen. Die mit ihnen gewonnenen Resultate übertragen sich unmittelbar auf $\mathfrak{R}_x', \ldots$, wenn man nur die von der Drehung $\mathfrak{d}$ abhängenden Glieder beseitigt.

Die neun in (89) auftretenden Komponenten lauten:

$$\begin{aligned}\Pi_{xx}' &= \Pi_{xx} - \Pi_1^0 x_x, \\ \Pi_{xy}' &= \Pi_{xy} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_y - \Pi_2^0\mathfrak{d}_z, \\ \Pi_{xz}' &= \Pi_{xz} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_z + \Pi_3^0\mathfrak{d}_y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{yx}' &= \Pi_{yx} - \Pi_2^0 \frac{1}{2} y_x + \Pi_1^0 \mathfrak{d}_z ,\\
\Pi_{yy}' &= \Pi_{yy} - \Pi_2^0 y_y ,\\
\Pi_{yz}' &= \Pi_{yz} - \Pi_2^0 \frac{1}{2} y_z - \Pi_3^0 \mathfrak{d}_x ;\\
\Pi_{zx}' &= \Pi_{zx} - \Pi_3^0 \frac{1}{2} z_x - \Pi_1^0 \mathfrak{d}_y ;\\
\Pi_{zy}' &= \Pi_{zy} - \Pi_3^0 \frac{1}{2} z_y + \Pi_2^0 \mathfrak{d}_x ,\\
\Pi_{zz}' &= \Pi_{zz} - \Pi_3^0 z_z ;
\end{aligned} \qquad (94)$$

dabei ist nun $\Pi_{xz} = \Pi_{yz}$, aber $\Pi_{xy}' + \Pi_{yx}'$ usf.

Die erwähnte Zerlegung geht dahin, daß

$$\Pi_{xx}' = T_{xx}, \ldots \frac{1}{2}(\Pi_{yz}' + \Pi_{zy}') = T_{yz}, \ldots$$

gewöhnliche Tensor-,

$$\frac{1}{2}(\Pi_{yz}' - \Pi_{zy}') = \mathfrak{U}_x, \ldots$$

Vektorkomponenten sind.

Es ist vielleicht bei der ziemlich komplizierten Abteilung der Endformeln nicht unnötig, ausdrücklich zu verifizieren, daß die so bestimmten von den Π_k^0 abhängigen Glieder in der Tat Tensor- bzw. Vektorcharakter haben.

Wir schreiben dazu die tensoriellen Glieder

$$P_{xx} = -\Pi_1^0 x_x, \ldots$$

$$P_{yz} = -\frac{1}{2}(\Pi_2^0 + \Pi_3^0)\frac{1}{2} y_z + \frac{1}{2}(\Pi_2^0 - \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x, \ldots$$

Beachtet man, daß Π_1^0, Π_2^0, Π_3^0, o, o, o spezielle Tensorkomponenten sind, so erkennt man sogleich, daß die von der Drehung $\mathfrak{d}$ abhängigen Glieder

$$o, o, o, \frac{1}{2}(\Pi_2^0 - \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x ,$$

$$\frac{1}{2}(\Pi_3^0 - \Pi_1^0)\mathfrak{d}_y , \quad \frac{1}{2}(\Pi_1^0 - \Pi_2^0)\mathfrak{d}_z$$

die Komponenten des in (3) definierten Tensorproduktes $|\mathfrak{d} \cdot \Pi^0|$ nach dem speziellen Achsenkreuz der Π_k^0 sind. Aus dem gleichen Grunde fallen die andern Glieder, nämlich

$$-\Pi_1^0 x_x, \ldots , \quad -\frac{1}{2}(\Pi_2^0 + \Pi_3^0)\frac{1}{2} y_z, \ldots$$

unter das in (7′) gegebene Schema, wobei zu bedenken ist, daß $x_x, \ldots \frac{1}{2} y_z, \ldots$ die Komponenten des Deformationstensors T sind.

Die vektoriellen Glieder schreiben wir

$$\mathfrak{U}_x = \frac{1}{2}(\Pi_3^0 - \Pi_2^0)\frac{1}{2} z_y - \frac{1}{2}(\Pi_2^0 + \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x, \ldots$$

Da $-(\Pi_2^0 + \Pi_3^0), \ldots$ nach S. 288 die Komponenten des Π^0 zugeordneten Tensors sind, so fällt das zweite Glied unmittelbar unter das Schema (2); das erste entspricht dem Schema (5′). Hiermit ist der angekündigte Nachweis erbracht.

Beide im Vorstehenden hervorgehobenen Umstände, die Neunzahl der Komponenten $\Pi_{xx}', \ldots$ und das Auftreten der Drehungskomponenten $\mathfrak{d}_x, \ldots$ in ihnen, wirken nun in dem Sinne, daß sich die vom Anfangszustand abhängigen Glieder nicht denen assimilieren, welche die eigentliche Erregung durch Deformation und Temperaturänderung ausdrücken. Es erscheint somit jedenfalls prinzipiell möglich, aus Beobachtungen über zentrisch-symmetrische Pyro- und Piezoelektrizität Schlüsse auf die ursprünglichen Momente zweiter Ordnung in einem Kristall zu ziehen.

Indessen ist ein solcher Schluß keineswegs in den einfachsten Anordnungen des Experiments möglich. Bei einer homogenen Deformation verschwinden die Drehungen von selbst aus den Formeln, wie ja auch nötig ist. Zugleich reduziert sich auch die Neunzahl der Komponenten $\Pi_{xx}', \ldots$ praktisch auf sechs; der Vektor $\mathfrak{U}$, über den oben gesprochen ist, gibt nämlich in diesem Falle keine Wirkung. In der Tat wird der von ihm abhängige Teil des ersten Oberflächenintegrals in (21) zu

$$\int \left([\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do ,$$

und dies fällt bei konstantem $\mathfrak{U}$ unter das Schema des Stokesschen Integrals $\int \operatorname{rot}_n \mathfrak{W} do$ und verschwindet, da es über eine geschlossene Fläche erstreckt wird. Bei homogener Deformation kommt also eine Wirkung der ursprünglichen Momente praktisch überhaupt nicht zur Geltung; sie verbirgt sich in den Parametern der Ausdrücke für die thermisch oder mechanisch erregten Momente.

Auf Anordnungen, bei denen die primären Momente zur Geltung zu kommen vermögen, wird in einer dritten Mitteilung einzugehen sein.

Göttingen, Ende Mai 1916.

(Eingegangen 19. Juni 1916.)

Über den lichtelektrischen Effekt und die β-Strahlung radioaktiver Substanzen.

Von Paul S. Epstein.

1. Erhebliche Erfolge, welche die Quantentheorie in ihrer Anwendung auf das Rutherford-Bohrsche Atommodell in letzter Zeit zu verzeichnen hatte, lassen es wünschenswert erscheinen die Konsequenzen derselben für eine möglichst große Zahl physikalischer Gebiete durchzuarbeiten. Als eine der Anwendungs-

möglichkeiten bieten sich die β-Strahlen radioaktiver Substanzen dar, welche sich, wie dies zuerst von O. v. Baeyer, O. Hahn und Lise Meitner[1]) gezeigt wurde, aus einer Reihe homogener Strahlenbündel mit diskreten Geschwindigkeiten zusammensetzen. Der Weg, auf welchem im folgenden eine Deutung dieser Erscheinungen versucht wird, ist dieser: A. Sommerfeld[2]) hat die Keplerellipsen, welche ein Elektron um einen Atomkern beschreiben kann, betrachtet und gezeigt, daß nur gewisse ausgezeichnete („statische") Ellipsen mit den von ihm aufgestellten Quantenbedingungen

$$\int\int dp_\varphi d\varphi = nh, \quad \int\int dp_r dr = n'h \qquad (1)$$

verträglich sind. Dabei bedeuten (r, φ) Polarkoordinaten der Bahnebene, p_r und p_φ die bzw. Impulse der Bewegung. Überraschende Übereinstimmungen mit der Erfahrung, welche diese Theorie für den Bau von Spektrallinien ergibt, haben die getroffene Auswahl von statischen Bahnen aufs überzeugendste bestätigt.

Wir stellen nun die Frage: Gibt es außer den statischen Ellipsen auch statische Hyperbeln? Auf hyperbolischen Bahnen könnten Elektronen mit quantenmäßig ausgezeichneten Energien ins Unendliche gelangen und als β-Strahlen oder auch als lichtelektrische Kathodenstrahlen in Erscheinung treten. Die ausführliche Theorie wollen wir bei einer späteren Gelegenheit veröffentlichen; an dieser Stelle seien nur die Hauptgesichtspunkte und einige der Resultate mitgeteilt.

Die Integration der Bedingungen (1) nach dp_φ, dp_r gibt

$$\int (p_\varphi - p_\varphi)\, d\varphi = nh, \quad \int (p_r - p_r)\, dr = n'h. \qquad (2)$$

Die Grenzen, zwischen denen nach φ und r zu integrieren ist, ergeben sich aus allgemeinen Prinzipien, welche wir an anderer Stelle[3]) dargelegt haben. Dagegen ist es nicht ganz eindeutig, wie der Phasenraum $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$ in den Koordinaten p_r, p_φ zu begrenzen ist, d. h. wie die Anfangswerte p_r und p_φ zu wählen sind. Im Falle elliptischer Bahnen hat es sich bewährt, sie gleich Null zu setzen, und wir übernehmen dies für das erste Integral ($p_\varphi = 0$); es wäre aber mit unseren Absichten unverträglich, $p_r = 0$ zu setzen, denn dann wird das zweite Integral (wie im allgemeinen überhaupt) unendlich. Wir haben deshalb die folgende Hypothese gemacht: für p_r ist derjenige konstante Wert zu wählen, für welchen das Integral endlich bleibt. Die Berechtigung dieser willkürlichen Annahme kann nur durch die Erfahrung geprüft werden.

Bei Berücksichtigung der relativistischen Veränderlichkeit der Masse gibt diese Theorie für ein System, das aus einem Kern von der Ladung $+ke$ (von unendlicher Masse) und einem Elektron von der Ladung $-e$ und der Ruhmasse m besteht, die folgenden ausgezeichneten Energiewerte

$$A = mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 k^2}{R^2}} - 1 \right], \qquad (3)$$

wo zur Abkürzung bezeichnet ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi e^2}{hc}, \\ R^2 &= \frac{\pi^2}{4}\left(n \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 k^2}{n^2}} + n' \right)^2 - n^2, \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit. Für die ganzen Zahlen n, n' gelten die Beschränkungen $n \geq 1$; n' kann positiv und negativ sein, ist aber so zu wählen, daß $R^2 > 0$ wird. Große Werte der Zahl n' sind unwahrscheinlich.

2. Lichtelektrische Emission kann nach dieser Auffassung nur eintreten, nachdem das erregende Licht ein Elektron aus einer der Bohr-Sommerfeldschen geschlossenen Bahnen in eine unserer statischen Hyperbeln befördert hat. Für diesen Übergang ist nämlich eine Energiezufuhr notwendig, da die (positive) Energiekonstante A_k einer hyperbolischen Bahn unter allen Umständen größer ist als die (negative) A_e einer elliptischen. Durch gewisse Beobachtungsresultate wird, wie wir an anderer Stelle ausführlicher begründen werden, die Hypothese nahegelegt, daß die einfallende Schwingungszahl ν, welche einen solchen Übergang herbeizuführen vermag, der folgenden Ungleichung genügen muß

$$h\nu \geq A_k - A_e = h\nu_g. \qquad (5)$$

Das Aufladepotential der bestrahlten Elektrode, welches der Energie A_k der lichtelektrischen Elektronen entspricht, ist

$$V = \frac{A_k}{e}\ \text{C. G. S. Einh.} = 300 \cdot \frac{A_k}{e}\ \text{Volt}.$$

Bei kleinen Kernladungen kann man in unserer Formel (3) die relativistischen Korrektionsglieder vernachlässigen (d. h. zum limes $c = \infty$ übergehen), das gibt

$$\left.\begin{aligned} V &= 300\, k^2 \frac{h}{e} N_0 \cdot \frac{1}{Z}\ \text{Volt}, \\ Z &= \frac{\pi^2}{4}(n + n')^2 - n^2, \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

1) O. v. Baeyer und O. Hahn, diese Zeitschr. **11**, 488, 1910; O. v. Baeyer, O. Hahn und L. Meitner, diese Zeitschr. **12**, 273, 1911.

2) A. Sommerfeld, Münchener Berichte, 425, 459, 1915.

3) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **49**, 1916 (im Erscheinen).

1) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. **40**, 609, 1913; **48**, 410, 1915.

wo $N_0 = \frac{2\pi m e^4}{h^3}$ die Rydbergsche Konstante bedeutet. Bekanntlich ist der Zahlenwert dieser Konstante $N_0 = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ und der beste Wert von $\frac{h}{e}$ wird gegenwärtig[1]) zu $1{,}3693 \cdot 10^{-17}$ angenommen, woher

$$V = \frac{13{,}52}{Z} k^2 \text{ Volt.} \qquad (7)$$

Eigentlich sind die Voraussetzungen unserer Theorie nur für Wasserstoffatome erfüllt und es ist ein glücklicher Umstand, daß Gehrcke und Janicki[1]) Aufladepotentiale gemessen haben, welche sie mit überzeugenden Argumenten als lichtelektrischen Effekt des Wasserstoffs deuten.

Für Wasserstoff ist die Kernladung $k = 1$, und die Hauptgeschwindigkeitsstufen werden nach (7)

n =	3	1	2	1	usw.
n' =	−1	0	0	1	
V =	13,55 Volt	9,20	2,30	1,52	
λ_g =	792,7 Å	1365,6	5350,4	8085,2	

Es ist zu bemerken, daß unsere Theorie sich auf freie Atome bezieht. Da Gehrcke und Janicki bei Bestrahlung mit der Quarz-Quecksilberlampe ($\lambda > 2300$ Å) $V = 2{,}30$ Volt gemessen haben, welcher Wert sich unter diesen Bedingungen auch aus unserer Tabelle ergibt, scheint diese Voraussetzung beim okkludierten Wasserstoff zuzutreffen. Bei festen Körpern müßte man eine Verminderung der Elektronengeschwindigkeit beim Durchtritt durch deren Oberfläche erwarten (wie sie auch in der Einsteinschen Formel für den lichtelektrischen Effekt vorausgesetzt wird).

Die Verhältnisse bei Wasserstoff liegen für eine weitergehende experimentelle Prüfung unserer Theorie besonders günstig: Die Geschwindigkeitsstufen liegen hier gerade in dem der Messung bequem zugänglichen Gebiet ziemlich weit auseinander[2]). Bei verhältnismäßig großen Kernladungen würden sie dagegen nach unserer Formel so dicht liegen, daß der Versuch nur ein lineares Anwachsen des Aufladepotentials mit der Schwingungszahl konstatieren könnte, wie es auch die Einsteinsche Formel fordert. Deshalb steht auch der Befund der schönen Messungen von Millikan[3]) mit unseren Folgerungen für Wasserstoff in keinerlei Widerspruch.

3. Die Analyse der Röntgenspektren durch Sommerfeld hat gezeigt, daß man für die Deutung gewisser Eigenschaften derselben die Atome von hoher Kernladung als „wasserstoffähnlich" behandeln kann. Dementsprechend wollen wir im folgenden die Geschwindigkeit des β-Strahl-Elektrons so berechnen, als ob der Kern isoliert wäre, und uns um die übrigen Elektronen nicht kümmern. Auch die Frage, woher das abgeschleuderte Elektron und dessen Energie kommt, steht außerhalb unserer Theorie. Nach der wohl allgemein akzeptierten Ansicht von Bohr kommt es aus dem Kern selbst; deshalb haben wir für k die Kernladung des entstehenden Produktes zu setzen.

In den Teilen ihrer Bahn, in denen die Geschwindigkeit ($v = c\beta$) zur Messung gelangt, haben die als β-Strahlen emittierten Elektronen nur noch kinetische Energie, welche nach einer bekannten Formel der Relativitätstheorie von der Geschwindigkeit so abhängt:

$$A = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right]. \qquad (8)$$

Der Vergleich mit (3) gibt sofort

$$\beta = \left[\left(\frac{R}{\alpha k} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (9)$$

Die Konstante α kann man nach (4) so ausdrücken

$$\alpha^2 = \frac{2N_0}{c^2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{e}{m} = 5{,}316 \cdot 10^{-5},$$

diesen Zahlenwert erhält man, wenn man für N_0 und $\frac{h}{e}$ die bereits benutzten Werte, für $\frac{e}{m}$ $5{,}316 \cdot 10^{17}$ el.-st. Einh. einsetzt.

Wir stellen die Gruppe von Geschwindigkeiten zusammen, welche sich aus (9) und (4) für $n = 1$, $n' = 0$ ergibt.

Berechnet		Gemessen von Danysz (*RaB*, *RaC*)		Gemessen von Rutherford und Robinson *RaB*		Gemessen von Rutherford und Robinson *RaC*		v. Baeyer, Hahn und Meitner (*RaB*, *RaC*)
k	β	β	Int.	β	Int	β	Int.	β
92	0,747	0,753	st.	0,751	1	0,750	4	0,74
91	0,732	0,733	s.s.	0,731	4	—		
90	0,718	0,722	s.	0,719	3	—		
89	0,704	0,706	st.	0,700	1	—		0,69
88	0,690	—		—		—		
87	0,677	0,682	s.s.	—		0,675	4	
86	0,664	0,660	s.	—		—		
85	0,652	—		0,656	3	—		
84	0,640	0,642	st.	0,635	1	0,648	6	0,63
83	0,628	—		—		0,632	6	
82	0,616	—		—		—		

Intensitätsbezeichnungen:
Danysz, st. = stark, s. = schwach, s. s. = sehr schwach.
Ruth. u. Rob., 1 = sehr stark, 7 = sehr schwach.

1) E. Gehrcke u. L. Janicki, Ann. d. Phys. **47**, 679, 1915.

2) Wenigstens, sofern man große n' als unwahrscheinlich ausschließt.

3) R. A. Millikan, diese Zeitschr. **17**, 217, 1916.

Bekanntlich[1]) liegen die Kernladungen der radioaktiven Elemente (k entspricht dem entstehenden Produkt) zwischen 83 und 92[2]). Es ist nun sehr merkwürdig, daß durch Einsetzen dieser Zahlen für k in unsere von empirischen Konstanten freie Formel (9) dieselben Geschwindigkeitsstufen erhalten werden, welche im Bereich $0{,}600 < \beta < 0{,}755$ von verschiedenen Autoren übereinstimmend gemessen wurden. In unserer Tabelle haben wir nämlich sämtliche in diesem Intervall an Radiumpräparaten gemessenen Werte von β verzeichnet[3]).

Ein anderer interessanter Umstand scheint uns zu zeigen, daß dieses Zusammentreffen nicht auf reinem Zufall beruht. Nach der Struktur unserer Formel müssen nämlich die β getrennte Gruppen bilden, von denen jede $83 \leq k \leq 92$ bei einer festen Kombination der Quantenzahlen n, n' entspricht. In der Tabelle haben wir eine dieser Gruppen angegeben. Es ist sehr bemerkenswert, daß auch die gemessenen β mit 0,632 abbrechen und kleinere Geschwindigkeiten erst nach einer größeren Lücke auftreten. Nach oben scheinen sich die gemessenen Geschwindigkeitsstufen stetig fortzusetzen, jedoch ist diese Stetigkeit eine ganz zufällige, welche dadurch vorgetäuscht wird, daß sich hier gerade die Gruppe der nächsthärteren β-Strahlen ($n = 3$, $n' = -1$; $83 < k < 92$) unmittelbar anschließt. Wir werden dies an anderer Stelle ausführlicher darlegen, woselbst wir auch einige Ergebnisse über weichere β-Strahlen und über p-Strahlen mitteilen werden.

4. Zusammenfassung.

1. Die quantenmäßige Verteilung der Bohr-Sommerfeldschen Ellipsenbahnen legt die Vermutung nahe, daß auch die Hyperbelbewegungen eines Elektrons um einen Atomkern quantenmäßig verteilt sind. Es erscheint daher wünschenswert die ausgezeichneten Energien dieser Klasse von Bahnen formelmäßig zu berechnen.

2. Unsere Theorie, welche diese Berechnung leistet, enthält eine willkürliche Annahme. Wenn diese Annahme uns auch die einfachste und plausibelste zu sein scheint, kann die Theorie in ihrer gegenwärtigen Fassung noch nicht als vollkommen gesichert gelten.

3. Schon in der vorliegenden Form führt die Theorie auf einige bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung, sowohl im Gebiete der lichtelektrischen Erscheinungen als in dem der β-Strahlen.

München, Juni 1916.

(Eingegangen 24. Juni 1916.)

1) Vgl. z. B. K. Fajans, diese Zeitschr. **16**, 456, 1915.
2) Polonium, dem $k = 82$ entsprechen würde, hat bekanntlich keine β-Strahlung.
3) Die Tabellen sind dem Zusammenfassenden Bericht von O. v. Baeyer (Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **11**, 66, 1914) entnommen.

Erklärung der Erscheinungen beim Passieren von Röntgenstrahlen an einem Bleirand.

Von E. G. Taylor.

In dieser Zeitschrift (**15**, 732, 844, 1914) erschien ein Bericht über eine Reihe von Untersuchungen von J. Laub, „Über die Zerlegung des Röntgenlichtes an einem Bleirand". Später gab er in den Verh. der Deutsch. phys. Gesellschaft 1915 S. 354 eine Zusammenfassung seiner Arbeiten und zugleich eine Hypothese zur Erklärung der Beobachtungen.

Das Ergebnis seiner Experimente war folgendes: Gehen Röntgenstrahlen an dem Rand eines undurchsichtigen Gegenstandes vorbei und fallen dann auf eine photographische Platte, die einige Zentimeter dahinter aufgestellt ist, so sieht man auf der Platte innerhalb des Schattenbereichs der Strahlung eine Reihe von parallelen Linien, die durch Stellen von geringer Intensität getrennt sind. In der letzten Arbeit ließ er Röntgenstrahlen durch eine schmale rechteckige Öffnung (0,3 mm Weite in einem dicken Bleischirm) fallen. Er fand ein zentrales Bild, auf jeder Seite symmetrisch begleitet von einer Reihe paralleler Linien. Ebenso berichtet er von einem Versuch, bei dem Röntgenstrahlen schief durch eine Kreisöffnung in einem Bleischirm passieren. Hierbei bildeten sich konzentrische Ringe um die Öffnung. Herr Laub schreibt die Erklärung der gefundenen Linien einer „Beugung der Röntgenstrahlung" an der wahrscheinlich mikrokristallinischen Struktur des Randes der Öffnung zu. Uns, wie vielen anderen auch, erschien eine andere einfachere Erklärung viel wahrscheinlicher, und wir hielten es der Mühe wert dafür eine Entscheidung zu suchen. Auf die Aufforderung von Prof. E. Mendenhall an der hiesigen Universität wurden einige von Laubs Experimenten ähnlich wiederholt. Bei unserer Anordnung hatte die Öffnung eine Entfernung von 28 cm von der Antikathode und die photographische Platte stand 34,7 cm hinter der Öffnung. Die Röhrenspannung betrug ungefähr 55000 Volt, die Betriebsstromstärke 2,5 Milliampere und die Expositionsdauer war 5 Stunden. Fig. 1 zeigt eine Aufnahme unter diesen Bedingungen. Unter genau denselben Verhältnissen wurde dann eine Bleiblende mit 0,6 mm Öffnungen im Abstand 8 cm von der Röhre eingeschaltet. Fig. 2 zeigt die entsprechende

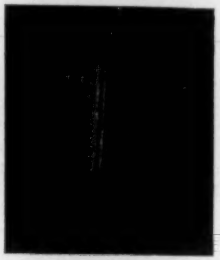


Fig. 1.

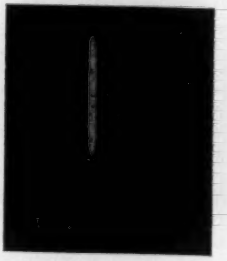


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Aufnahme. Die Wirkung der Blende war, die Ausdehnung der strahlenden Fläche (Brennfleck) einzuschränken, der Erfolg war gänzliches Ausbleiben der Linien. Diese Tatsache ließ vermuten, daß die Linien herrührten von einer astigmatischen Abbildung oder Projektion der Antikathodenpunkte, die am meisten strahlen, durch den Schlitz hindurch. Es schien diese Vermutung richtig zu sein; denn wenn man den Brennfleck durch eine kreisförmige Öffnung (0,3 mm) sich abbilden ließ, fand man (Fig. 3) mehrere Zentren der Röntgenstrahlenemission. Im allgemeinen sieht man auf den Bildern konfokale Ellipsen, wobei die Brennpunkte den Hauptanteil der Röntgenstrahlung emittierten. Diese Brennpunkte entsprechen genau den Linien auf Fig. 1. Um den Beweis noch schlagender zu machen, wurde an Stelle des Bleispalts ein solcher aus Eisen gesetzt und die ersten Experimente dieser Untersuchungen wiederholt. Fig. 4 zeigt die Übereinstimmung mit den früheren Versuchen.

Danach scheint es sicher zu sein, daß die Linien wirklich herrühren von einer astigmatischen Abbildung der verschiedenen Strahlungsquellen auf der Antikathodenfläche. Auch erklärt diese Annahme die konzentrischen Ringe, die sich bei Verwendung der Kreisöffnung zeigen.

Wir schließen daraus, daß die Beobachtungen von Laub nichts zu tun haben mit einer mutmaßlichen mikrokristallinischen Struktur bearbeiteter Metalloberflächen. Es ist auch höchst unwahrscheinlich, daß zwei so verschiedene Elemente wie Eisen und Blei genau die gleiche Oberflächenstruktur haben sollten, wie man ja nach unseren Resultaten glauben müßte.

Ebenso haben wir andere Experimente von Laub wiederholt, bei denen die Röntgenstrahlen durch eine ziemlich große Öffnung im Bleischirm passierten (diese Zeitschr. 15, 730, 1914). Unsere Photographien zeigen nicht die feinen Linien wie Laubs Zeichnungen, man sieht aber ähnliche Anzeichen, nämlich Verdoppelung der Kanten und gewisse Intensitätsminima. Alle Einzelheiten auf unseren Photographien lassen sich mit der oben erwähnten Abbildungshypothese erklären, es ist nach allem, was wir gezeigt haben, im höchsten Grade wahrscheinlich, daß man ebenso die entsprechenden Ergebnisse von Laubs Aufnahmen deuten könnte, wenn man die Brennfleckverteilung in seiner Röhre kennen würde. Wir konnten nicht alle Versuche Laubs wiederholen; aber wir glauben, daß wir genügend Anhaltspunkte für die Behauptung haben, daß Laubs Ergebnisse nicht einer mikrokristallinischen Struktur zuzuschreiben sind, sondern einfache Folgen der geometrischen

Beziehungen zwischen Öffnung, Platte und Brennfleck in seiner Röhre sind.

Physikalisches Institut, Universität Wisconsin (Madison, Wisconsin USA.), 5. Mai 1916.

(Aus dem Englischen übertragen von Josef Engl.)

(Eingegangen 26. Juni 1916.)

Die Röntgenspektren der Elemente *Na* bis *Cr*.

Von Manne Siegbahn und Wilhelm Stenström.

In einer früheren Mitteilung[1]) wurde über eine Untersuchung der Röntgenspektren (*K*-Reihe) der Elemente *Ge* bis *Cr* berichtet. Bei diesem letzten Elemente beginnt die Absorption im Röntgenrohrfenster und in Luft sich kenntlich zu machen. Für die Fortsetzung zu noch leichteren Elementen war daher nötig im Vakuum und mit weniger absorbierenden Fenstern zu arbeiten. Nachdem ein Vakuumspektrograph[2]) jetzt gebaut und probiert worden ist, wurde die genannte Untersuchung weitergeführt.

Mehrere von den unten verzeichneten Elementen sind schon früher von Moseley[3]) untersucht worden. Unsere Bestimmungen zeigen durchweg dieselben Abweichungen von dem Moseleyschen Werte wie unsere früheren Messungen und sind wahrscheinlich auf verschiedene Gitterkonstanten zurückzuführen. Benutzt wurde teils Steinsalz, teils Gips und ihre Gitterkonstanten zu

$$d = 2{,}814 \text{ und } d = 7{,}621 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

bzw. angenommen. Diese Werte sind auch unseren früheren Messungen zugrunde gelegt.

Für die experimentelle Methodik sei auf die früheren Mitteilungen hingewiesen. Die untersuchten Stoffe wurden in folgenden Formen benutzt: *Va* und *Ti* als Vanadin- bzw. Titansäure; *Sc* als Sulfat; dieses Präparat stammte aus den nachgelassenen Sammlungen von L. F. Nilsson und wurde uns von dem Nobelkomitee für Chemie, Stockholm, gütigst zur Verfügung gestellt; *Ca* und *P* als Oxyden; *K* als Sulfat, *Cl* und *Na* als Kochsalz, *S* als Na_2S und schließlich *Si*, *Al* und *Mg* in reinem Zustande.

Da die Gipskristalle eine Gitterkonstante von $d = 7{,}621 \cdot 10^{-8}$ haben, so ist nach der Gleichung

$$\lambda = 2d \sin \varphi$$

die größtmögliche Wellenlänge, die noch reflektiert werden kann, $15{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm und zwar würde dies bei senkrechter Inzidenz eintreffen. Bei zunehmendem Glanzwinkel φ wird aber die Intensität des reflektierten Strahls immer kleiner. Es würde daher ein Winkelwert von $\varphi = 50^0$ bis 60^0 die Grenze darstellen. In Wirklichkeit ist es Friman in seiner Doktorarbeit gelungen, eine Wellenlänge von $12{,}3 \cdot 10^{-8}$ entsprechend einem Winkel von $\varphi = 54^0$ nachzuweisen. Ein Fortschreiten zu längeren Wellen setzt einen Kristall voraus, der eine noch größere Gitterkonstante hat. Glimmer mit d gleich etwa $10 \cdot 10^{-8}$ cm wäre noch brauchbar. Wie durch Extrapolation ersichtlich, ist es mit unseren jetzigen Mitteln nicht möglich, die Reihen länger als bis *Na* zu verfolgen.

Um die Absorption an der Scheidewand zwischen Spektrograph und Röntgenrohr so weit als möglich herabzusetzen, wurde bei den leichtesten Elementen nur ein dünnes rotes Seidenpapier an die Spalte gelegt. Dies genügt, um den Luftstrom vom Spektrographen (mit Vorvakuum) zum Röntgenrohr hinreichend klein zu machen, damit im letzteren das Röntgenvakuum aufrecht erhalten werden kann. Andererseits geben die kleinen Poren im Papier den Röntgenstrahlen freien Durchtritt. Eine Schwärzung der Platte durch hindurchgehendes Licht war nicht zu beobachten.

Das Röntgenrohr war von derselben Gestalt wie früher, nur war die Kugel durch ein zylindrisches Rohr von 7 cm Weite ersetzt, um die Antikathode näher an den Spalt setzen zu können. Ferner war die Hohlkathode für weiche Strahlen zentriert. Beim Betriebe wurde das Vakuum so eingestellt, daß die kleinstmögliche Spannung mit beibehaltenem Kathodenstrahlkegel zur Verwendung kam.

Wie schon in unserer früheren Mitteilung bemerkt wurde, nimmt die Intensität der β_2-Linie mit abnehmendem Atomgewicht relativ stark ab. Dieselbe Beobachtung ist auch von E. Wagner[1]) gemacht worden. Ebenso nimmt die Intensität der β_1-Linie merklich ab. Dagegen kommen zwei Linien bei den leichteren Elementen neu hinzu ($\alpha_3 \alpha_4$), die bei den etwas schwereren von ihnen nicht getrennt werden können. (Siehe Tabelle.)

Diese zwei Linien liegen sehr nahe an der $\alpha_1 \alpha_2$-Linie und sind bei unseren früheren Messungen *Ge*—*Cr* gelegentlich bei einigen Elementen beobachtet worden. Auch bei *Se* und *Br* ist dicht an der α-Dublette eine schwächere Linie zu sehen, die vielleicht als eine Fortsetzung dieser Reihe zu betrachten ist. Bei

1) M. Siegbahn und W. Stenström, diese Zeitschr. **17**, 48, 1916.

2) M. Siegbahn und E. Friman, diese Zeitschr. **17**, 176, 1916; vgl. ferner E. Frimann, Diss. Lund 1916.

3) Moseley, Phil. Mag. (6) **27**, 703, 1914.

1) E. Wagner, Sitz.-Ber. d. Bayr. Akad. Math.-phys. Kl. 1916, S. 31.

	Grundstoff	$\lambda \cdot 10^8$ cm α_2	α_1	α_3	α_4	β_1	β_2
26	*Fe*	1,932	1,928			1,748	1,736
25	*Mn*	2,097	2,093			1,902	1,892
24	*Cr*	2,288	2,284			2,079	2,069
23	*Va*	2,502	2,498			2,281	
22	*Ti*	2,746	2,742	2,729		2,509	2,492
21	*Sc*	3,032	3,028	3,011		2,778	
20	*Ca*	3,359	3,355	3,328		3,086	3,074
19	*K*	3,738	3,735	3,724		3,449	
18	*Ar*						
17	*Cl*	4,712		4,692		4,394	
16	*S*	5,360		5,317	5,314	5,018	(5,029)
15	*P*	6,168		6,129	6,122	5,808	(5,853)
14	*Si*	7,131		7,088	7,080	6,759	
13	*Al*	8,360		8,310	8,300	7,986	
12	*Mg*	9,915		9,856	9,845	9,477	
11	*Na*	11,951					

den leichten Elementen hat $\alpha_3\,\alpha_4$ kleinere Wellenlänge als $\alpha_1\,\alpha_2$, bei *Se* und *Br* dagegen größere, so daß, wenn die Vermutung richtig ist, die zwei Linienreihen bei den zwischenliegenden Elementen einander überkreuzen sollten. Allerdings ist zu bemerken, daß die *Se* und *Br* naheliegenden Elemente diese Linien $\alpha_3\,\alpha_4$ nicht zeigen oder wenigstens nur mit einer weit geringeren Intensität relativ zu $\alpha_1\,\alpha_2$ als bei *Se* und *Br*.

Lund, Physikalisches Institut, 22. Juni 1916.

(Eingegangen 24. Juni 1916.)

Über Wollastondraht.

Von Carl Benedicks.

1. In Anbetracht der außerordentlich großen Dehnbarkeit der Metalle, welche erlaubt Blattmetall so dünn darzustellen, wie die zu 0,00009 mm (0,09 μ) dick angegebenen Goldblättchen[1]) muß es m. E. befremdend wirken, daß auch mit dem Wollastonverfahren[2]) (Versilbern des auszuziehenden Drahtes; Ausziehen; Weglösen des *Ag*), doch nicht dünnere Haardrähte darzustellen möglich ist, als etwa vom Durchmesser 1 μ[3]).

Es muß als bis jetzt unentschieden gelten, ob dieses für die Verfeinerung der physikalischen Technik lästige Verhalten darauf beruht, daß sich längere, zusammenhängende Drähte von geringerem Durchmesser tatsächlich z. Z. nicht ziehen lassen, oder ob der Draht nur beim Auslösen des umgebenden Metalles zerrissen wird.

Durch die Aufgabe, in einem Lutzschen Saitenelektrometer von Edelmann einen Platindraht von etwa 1 μ einzusetzen, wurde ich veranlaßt mich mit diesem Problem etwas näher zu beschäftigen. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die soeben erwähnte Begrenzung in erster Linie darauf zurückzuführen ist, daß man, soweit mir bekannt, für das Abätzen der Wollastondrähte noch kein rationelles Verfahren besitzt. Es soll deshalb in den folgenden Zeilen auseinandergesetzt werden, welche Faktoren ausschlaggebend sind, und Anweisungen gegeben werden, wie die Behandlung der feinsten Wollastondrähte rationell stattzufinden hat.

2. Der zuerst anzuführende Umstand, welcher zum Zerreißen der dünnsten Wollastondrähte führt, ist derjenige, daß der Angriff des in der Salpetersäure eingesenkten Drahtes nicht gleichmäßig erfolgt. Man beobachtet leicht, daß an einzelnen Stellen die Seele frühzeitig bloßgelegt wird; diese Stellen werden im allgemeinen von dem Gewicht des angrenzenden noch dicken Drahtes stark beansprucht, so daß die Seele an diesen Stellen sehr oft zerreißt.

Einigermaßen verbessert wird die Sache, wenn man nur sehr verdünnte Säure, wie dies ja bisweilen empfohlen wird, anwendet. Man hat jedoch gar keine Garantie, daß die Verdünnung der Säure — die eine sehr erhebliche Zeitverschwendung bedeutet — eine gleichmäßige Entlastung herbeiführt.

Es bieten sich hier zwei Auswege dar. Entweder muß der Draht, in horizontaler Lage, seiner ganzen Länge nach unterstützt werden, etwa dadurch, daß er am Boden einer flachen Schale liegt. Aus später anzugebendem Grund ist dies nicht zu empfehlen. Weitaus rationeller ist es, den Angriff der — konzentrierten und gewärmten — Säure so zu leiten, daß bei vertikal hängendem Draht die Entlastung von unten her regelmäßig nach oben vorschreitet, was am einfachsten dadurch erzielt wird, daß der in geeigneter Weise beschwerte Draht nur allmählich in die Säure hinuntergesenkt wird. Die Einzelheiten, wie geeignete Beschwerung, werden im folgenden näher besprochen.

In dieser Weise läßt sich bisweilen ein gutes Resultat ohne weiteres erzielen. Im allgemeinen beobachtet man jedoch folgende Erscheinung (vgl. die schematische Fig. 1). Der ursprünglich annähernd vertikale Draht (*AB*) krümmt sich beim fortschreitenden Dünnerwerden zu einer Kurve *AC*; bei *C*, dem höchstgelegenen Punkt der bloßgelegten Seele, ist

1) M. Faraday, Bakerian Lecture, Phil. Trans. 1857, 145; Experimental Researches in Chemistry and Physics, London 1859, 391.

2) W. H. Wollaston, A method of drawing extremely fine wires. Phil. Trans. 1913, 114.

3) Vgl. z. B. C. W. Lutz, diese Zeitschr. 9, 100, 1908; etwa derselbe Grenzdurchmesser (0,9 μ) wurde schon von Wollaston l. c. angegeben.

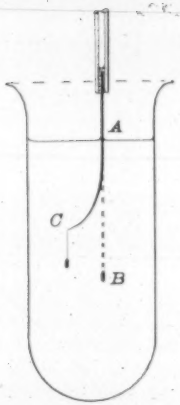


Fig. 1.

ein scharfer Knickpunkt vorhanden. Hier ist die Beanspruchung besonders groß, so daß der Zusammenhang stark gefährdet wird.

Bei freihängendem Draht kann der scharfen Biegung ungeachtet der Zusammenhang bisweilen bewahrt werden; liegt der Draht aber am Boden, ist er viel stärker gefährdet, und ist er schließlich an seinen Enden festgespannt, — wie bisweilen empfohlen wird — erfolgt das Zerreißen unfehlbar, wenn diese Krümmung stattfindet.

Das Hilfsmittel läßt sich jedoch unschwer angeben. Die Krümmung beruht auffällig erweise auf inneren Spannungen des Belegmetalles, sei es schon bei dem Ziehprozeß entstanden, oder durch das nachfolgende Aufwickeln auf die — meistens sehr dünne — Drahtrolle. Solche innere Spannungen lassen sich nun leicht beseitigen, und zwar im allgemeinen durch ein kurzdauerndes Erhitzen auf etwa 300—400 Grad. Es ist sehr auffallend, daß um diese Temperatur bei der meisten Materie eine Entspannung schnell stattfindet, sei es im gehärteten Stahl (Troostitbildung) oder im ungleichmäßig gekühlten Glase.

3. Nach dem Angeführten läßt sich grundsätzlich folgende Vorgangsweise für ein rationelles Bloßlegen der Wollastondrähte angeben:

Der Draht wird 1. am unteren Ende mit ein wenig unlöslichem Material beschwert; 2. etwa geradlinig gezogen und dann durch schwaches Erhitzen entspannt; 3. schließlich erfolgt das allmähliche Heruntertauchen in erwärmte starke Salpetersäure.

4. Nach der von mir gewonnenen Erfahrung geschieht die Ausführung zweckmäßig in folgender Weise.

Die zuverlässige Beschwerung des freien Endes — ohne welche mit einem bloßgelegten Wollastondraht im allgemeinen nichts anzufangen ist, ganz besonders wenn die Seele nahezu unsichtbar ist — führe ich folgendermaßen aus. An einem Ende des abgeschnittenen Drahtstücks wird ein Knoten gemacht wie in Fig. 2 a; durch die noch weite Öse *A* wird ein dünner Platinhaardraht *C* (etwa 0,0025—0,050 mm) geführt und durch Drehen des Wollastondrahtes zusammengewunden (*C'*). Der Knoten wird dann noch etwas zugezogen (all-

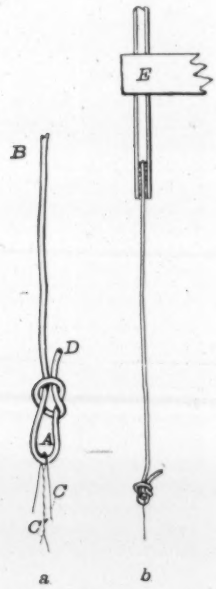


Fig. 2.

zu scharfe Biegungen zu vermeiden!). Das freie Ende (*D*) darf nicht zu kurz abgeschnitten werden, da sich sonst der Knoten lösen kann. Der Haardraht (*C'*) wird ev. noch umgewunden, so daß die Öse möglichst klein wird (sonst Schwierigkeit beim Passieren der Flüssigkeitsoberfläche); es wird dann *C'* bis auf einige Millimeter abgeschnitten. Es entsteht das Aussehen Fig. 2 b. Dann erfolgt die Entspannung, etwa dadurch, daß der Draht an einem *Al*-Blech liegend, über einem Gasbrenner vorsichtig erwärmt wird. Nach der Entspannung darf der Draht nicht weiter gebogen werden.

Zur Ätzung verwende ich gewöhnliche konzentrierte, chlorfreie Salpetersäure (spez. Gew.

etwa 1,10—1,38) in einem weiten Probierrohr, das in einem wassergefüllten Erlenmayer-Kolben stehend, auf 60—80 Grad erwärmt wird.

Der Draht wird in der Verlängerung der Rohrachse an einem Stativ befestigt, das eine ziemlich sanfte vertikale Bewegung (seitlicher Anschlag!) des Drahtes erlaubt.

Es wird dann der Draht bis gerade über das freie Ende (*D*) eingesenkt; eine mäßige Gasentwicklung darf vorkommen. Nach ein paar Minuten sieht man das kleine Gewicht einige Millimeter heruntersinken: der Knoten hat sich von selbst zugezogen. Nachdem das umhüllende Metall weggelöst worden ist, wird der Draht wieder aufgezogen; dabei werden die gewöhnlich ansitzenden Gasbläschen entfernt, die sonst ein gefährliches Umherschweifen des freien Endes verursachen können.

Nunmehr wird der Draht bis zu einer größeren Strecke hinuntergesenkt: der Angriff schreitet nach oben fort, eine allmähliche Entlastung herbeiführend. Sollten Gasbläschen in zu großer Menge sitzen bleiben, werden sie durch Aufziehen des Drahtes entfernt.

Das Ziehen des Drahtes durch die Oberfläche hat noch die nicht unwichtige Aufgabe, die *Pt*-Seele zu reinigen. Das Silber wird nämlich nur selten glatt aufgelöst; wie Beobachtungen im Metallmikroskop hervorgehen ließen, entsteht gewöhnlich eine aufgelockerte Rinde von Silberkriställchen (ev. mit Kristallen von Silbernitrat, das in sehr konzentrierter Salpetersäure schwer löslich ist). In dieser stabileren Form löst sich das Silber mitunter nur sehr schwierig auf. Beim Durchziehen durch die Oberfläche wird diese Rinde mechanisch zerstört und oft zu Klümpchen angesammelt, die dann in der Säure verhältnismäßig schnell verschwinden.

Für die Platinseele ist das Hin- und Herziehen durch die Oberfläche gefahrlos, wenn das Gewicht wie beschrieben geformt worden ist; in keinem einzigen Fall, auch bei unsanfter Führung, ist mir dabei der Draht gerissen. Der Hauptvorteil der beschriebenen *Pt*-Beschwerung ist eben, daß sie sich wegen des geringen Durchmessers leicht durch Flüssigkeitsoberflächen führen läßt, was noch für das nachherige Abwaschen (erwärmtes Wasser, Alkohol) wichtig ist.

Wenn es erwünscht ist, beide Enden ungeätzt zu lassen (etwa wegen des ev. nötigen beiderseitigen Verlötens bei *Al*-Seele) kann man allerdings mit Wollaston den Draht ∿-förmig gebogen hineinsenken, wobei (beim feinsten Draht) eine Beschwerung in der Mitte stattzufinden hat. Allerdings ist die obige Behandlungsweise eine viel bequemere.

Bei den obigen Auseinandersetzungen wurde hauptsächlich dünnste *Pt*- oder *Au*-Seele berücksichtigt; sie sind jedoch ebensogut für *Al*-Seele gültig. Allerdings ist bei *Al* größere Vorsicht nötig, da Drähte aus diesem Metall leichter zerrissen werden; wegen des niedrigeren Schmelzpunkts dürfte eine niedrigere Temperatur als für *Pt* und *Au* zu empfehlen sein[1]).

Die oben beschriebene Behandlungsweise der feinsten Wollastondrähte bedeutet nach meiner Erfahrung eine erheblich vergrößerte Sicherheit und Leichtigkeit der Handhabung, sowie eine bedeutende Zeitersparnis, indem das Abätzen z. B. leicht in einer Viertelstunde stattfindet.

5. Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob sich nicht feinere Wollastondrähte als 1 μ darstellen lassen.

Eingehendere Versuche sind von mir nicht angestellt worden. Es wurde jedoch ein Wollastondraht von Heraeus, angeblich mit Seele aus *Pt* von 1 μ, vom äußeren Durchmesser 0,25 mm zum Durchmesser 0,13 mm ausgezogen. Die resultierende Abnahme des Seelendurchmessers hat nicht gehindert, lange Stücke zu erhalten.

Ein anderes Stück desselben Drahtes wurde schwach ausgewalzt; das nachher bloßgelegte „Wollastonband" war im Mikroskop zwar nicht gerade gleichmäßig, ließ sich aber jedenfalls in gewisser Länge erhalten.

Aus dem, was angeführt worden ist, schließe ich, daß die für die Entwickelung der physikalischen Mikrotechnik wichtige Verfeinerung des Wollastondrahtes wenigstens bis 0,5 μ ohne größere Schwierigkeit möglich ist.

Es ist einleuchtend, daß dabei besonders größtmögliche Gleichmäßigkeit des Außenmetalls erstrebt werden muß. Weiter muß in Frage gestellt werden, ob vielleicht anderes Material als *Ag* als Außenmetall vorzuziehen wäre. Es scheint mir gewisse beim Ziehen des Stahldrahtes gewonnene Erfahrung dafür zu sprechen, daß für das Erreichen der äußersten Verfeinerungen — wo vor allem der Zusammenhang der Seele bewahrt werden muß — das Außenmetall härter, weniger nachgiebig sein muß als das innere Metall. Demgemäß würde etwa eine *Ag-Cu*-Legierung vielleicht dem *Ag* vorzuziehen sein.

---

1) Aus einer Behandlungsvorschrift für *Al*-Wollastondraht, die mir neuerdings die Firma W. C. Heraeus zugehen ließ, entnehme ich, daß es sich empfehlen soll, vor dem Abbeizen den Draht ca. 2—5 Min. auf ca. 220° — jedoch nicht höher — zu erhitzen.

6. Zusammenfassung.

Nach den obigen Auseinandersetzungen kann folgendes Verfahren empfohlen werden, um den feinsten Wollastondraht bloßzulegen.

Das abzubeizende Drahtstück wird unten mit einem *Pt*-Drähtchen beschwert (nach Fig. 2); vorhandene Spannungen werden durch kurzdauerndes Erhitzen auf etwa 200—400 Grad entfernt. Der Draht wird dann, in einem Stativ befestigt, stückweise in konzentrierte, erhitzte Salpetersäure hineingesenkt, wodurch in kürzester Zeit allmähliches, ungefährliches Entfernen der Silberhülle stattfindet.

Dieses Verfahren dürfte eine Erleichterung der Handhabung bedeuten, welche zur Verfeinerung des Wollastondrahtes unter 1 μ führen kann.

Stockholm, Physik. Institut der Universität, Juni 1916.

(Eingegangen 21. Juni 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Forschungen zur Farbenlehre.

Von Wilhelm Ostwald.

Bisheriger Stand der Farbenlehre.

Die Arbeiten in der Farbenlehre sind von jeher durch den Umstand beeinträchtigt worden, daß keine genügende Klarheit über die Frage bestand, welcher allgemeineren Wissenschaft sie zuzurechnen ist. So kam es, daß sie in ihren ersten Zeiten als physikalisches oder gar chemisches Problem betrachtet worden ist und daß ihr erfolgreichster Bearbeiter in neuerer Zeit, Helmholtz, zu den Problemen der Farbenlehre zunächst vom Standpunkte des Physikers und dann von dem des Physiologen Stellung genommen hatte. Indessen tritt doch bei den heutigen Forschern unter der Führung E. Herings mit großer Entschiedenheit die Erkenntnis in den Vordergrund, daß die Farbenlehre in letzter Analyse sich als eine psychologische Disziplin erweist, daß also die Psychologie jene allgemeine Wissenschaft ist, in welcher die Farbenlehre als Teildisziplin untergebracht werden muß. Gemäß dem gesetzmäßigen Aufbau der gesamten Wissenschaften spielen demnach die vorher genannten Disziplinen von der Logik und Mathematik (die wir zusammen Mathetik nennen wollen) ab durch die Physik, Chemie und Physiologie in der Farbenlehre die Rolle von Hilfswissenschaften. Es ist deshalb vollkommen natürlich, daß jene Disziplinen, deren Entwicklung wegen ihrer verhältnismäßig größeren Einfachheit schneller stattfand als die der Psychologie, zunächst diejenigen Gebiete der Farbenlehre, in welchen sie besonders Anwendung fanden, als Teile des eigenen Gebietes behandelten. In solcher Weise hat sich insbesondere eine ausgedehnte physikalische Farbenlehre entwickelt, die auf dem engen und bestimmten Zusammenhang beruht, welche die Farbenempfindung zu der Reizung des Sehapparats mit Hilfe von Licht gegebener Wellenlängen aufweist. Aber alle diese allgemeineren Wissenschaften können, wie das in der Natur der Sache liegt, nur Material zu der endlichen Lösung der Probleme der Farbenlehre beibringen, reichen aber nicht aus diese Lösung zu bewerkstelligen. Sie sind mit anderen Worten zwar notwendige, aber nicht zureichende Bestandteile einer wissenschaftlichen Farbenlehre.

Auch kann man in der Geschichte der Farbenlehre die Schwierigkeiten deutlich erkennen, welche aus der ungenügenden Klarheit über diese Verhältnisse entstanden. Der leidenschaftliche Kampf beispielsweise, welchen Goethe gegen Newton führte, kommt in letzter Instanz auf den Umstand zurück, daß für Goethe die Farbenlehre sachgemäß ein psychologisches Problem war, während Newton nur die physikalischen Bedingungen bestimmter Farbenempfindungen festgestellt hatte und von seinen Nachfolgern diese Bedingungen als eigentlicher und letzter Inhalt der Farbenlehre behandelt wurden. In neuerer Zeit hat sich insbesondere E. Hering das Verdienst erworben, auf die tatsächlichen Verhältnisse energisch hinzuweisen und gleichzeitig den Grund einer rein psychologischen Farbenlehre zu legen, für welche sachgemäß die genannten anderen Wissenschaften nur als Hilfsdisziplinen in Betracht kommen.

Immerhin hat aber auch die neuere Entwicklung noch nicht dazu geführt, die Hauptprobleme der rationellen Farbenlehre zu lösen. Eine Zusammenstellung desjenigen, was bisher bekannt war, läßt große Lücken in bezug auf eine ganze Anzahl von wesentlichen Punkten erkennen. So ist beispielsweise von jeher der Idealbegriff einer reinen oder gesättigten Farbe benutzt worden, um die unreinen oder trüben Farben auf ihn zu beziehen. Fragt man nach einer Definition einer gesättigten Farbe, so wird man meist auf die Farben von Schwingungen gleicher Periode, also die im Spektrum isolierten

Farben hingewiesen. Eine etwas eindringendere Überlegung läßt aber erkennen, daß die Identifizierung spektralreiner Farben mit gesättigten Farben unmöglich richtig sein kann. Zu den reinsten Farben, die gegenwärtig die Technik herstellt, gehören die gelben, und man kann am Gelb eine Verunreinigung insbesondere mit Schwarz oder Grau besonders leicht erkennen. Alle Forscher über diesen Gegenstand sind nun vollkommen einig darüber, daß unter allen reinen oder gesättigten Farben die gelbe die hellste ist. Betrachtet man aber sorgfältig ein Spektrum und sucht festzustellen, welcher Anteil darin von reingelben Strahlen eingenommen wird, so überzeugt man sich, daß dieses Gebiet überaus eng ist und sicherlich auch im psychophysischen Sinne höchstens einige Prozente der Gesamtheit des Spektrums ausmacht. Ein gesättigtes Gelb müßte also, wenn es mit einem spektralreinen identisch wäre, eine Helligkeit von einigen Prozenten der Helligkeit eines reinweißen Körpers haben, wovon gar nicht die Rede sein kann, denn die Helligkeit des Gelb ist viel größer. Tatsächlich wird hernach gezeigt werden, daß sie 0,9 von der des absoluten Weiß beträgt, woraus mit Notwendigkeit folgt, daß das reine Gelb ganz sicherlich nicht aus spektralreinen Strahlen, auch nicht aus nahe benachbarten, etwa 580 bis 590 bestehen kann, sondern eine große Anzahl sonstiger Strahlen enthalten muß. Andererseits ergibt die spektrale Analyse beliebiger reingelber Lösungen oder Aufstriche ein ganz übereinstimmendes Resultat, nämlich das ungeschwächte Vorhandensein aller Strahlen vom roten langwelligen Ende des Spektrums bis zum Blaugrün, etwa der Wellenlänge 490. Je reiner das Gelb ist, um so genauer entspricht die Spektralanalyse der eben gegebenen Beschreibung; sowie man an irgendwelcher Stelle dieses Gebietes Teilabsorptionen nachweisen kann, erweist sich auch das zugehörige Gelb psychophysisch als unrein im Vergleich mit anderen reinen gelben Farben.

Ein anderes ungelöstes Problem ist bei dieser Gelegenheit gleichfalls berührt worden. Es ist dieses die Frage nach dem Reinheitsgrade einer vorgelegten Farbe und den Mitteln diesen zu messen. Das einzige was bisher vorlag, sind vereinzelte und schüchterne Vorstöße einzelner Forscher auf Grund des Satzes, daß die verschiedenen Abkömmlinge eines gegebenen Farbtones um so reiner sind, je mehr von ihrer Gegenfarbe sie brauchen, um (etwa mit Hilfe der Drehscheibe) ihre Farbe auf reines Grau zu neutralisieren. Ersichtlicherweise gibt dieses Verfahren, auch wenn man es grundsätzlich soweit ausdehnt, als der Grundgedanke es gestattet, nur die Möglichkeit relativer Reinheitsbestimmungen in bezug auf eine bestimmte zum Kompensieren benutzte Gegenfarbe. Es gestattet also keinen Schluß auf absolute Reinheitswerte und ermöglicht ebensowenig einen Übergang von einem Farbton zum anderen. Denn das Prinzip vermag nur über Reinheitsverhältnisse eines Paares von Komplementärfarbtönen Auskunft zu geben, gestattet aber nicht eine Ausdehnung auf irgendeinen dritten Farbton.

Ein drittes Beispiel für den gegenwärtigen Zustand der Farbenlehre ist die Frage nach der Helligkeit der bunten Farben. Die Schwierigkeiten der praktischen Photometrie bei dem Vergleich verschiedenfarbiger Lichtquellen haben sich als so groß erwiesen, daß von zahlreichen kompetenten Forschern die Vergleichbarkeit der Helligkeit verschiedenfarbiger Lichter überhaupt geleugnet und somit die Aufstellung des spezifischen Helligkeitswertes einer gegebenen Farbe für unmöglich erklärt wird. Durch den einfachen Ausweg, nicht verschiedene bunte Farben miteinander auf ihre Helligkeit zu vergleichen, sondern für jede einzeln ein Grau aufzusuchen, welches psychologisch denselben Helligkeitseindruck macht, kann man die eben genannten Schwierigkeiten grundsätzlich beseitigen und tatsächlich für jede vorgelegte Farbe einen Helligkeitswert bestimmen, der gewissen überaus einfachen und allgemeinen Gesetzen unterliegt. Gleichzeitig ergibt sich allerdings, daß die bisherige Einbeziehung der Helligkeit unter die maßgebenden Koordinaten jeder Farbe, als welche Farbton, Reinheit und Helligkeit seit Helmholtz allgemein angesehen wurden, nicht als rationell bezeichnet werden kann, da die Helligkeit sich als eine besondere Eigenschaft der Farben ergibt, die mit ihrer Analyse und Synthese unmittelbar nichts zu tun hat. Als Elemente, die bei der Farbanalyse erhalten werden, müssen vielmehr neben dem Farbton die Anteile an Schwarz und an Weiß in der vorgelegten Farbe bezeichnet werden, deren Angabe sowohl die Ergebnisse der Analyse eindeutig auszudrücken gestattet, wie auch andererseits eine entsprechende Synthese mit Wiederherstellung der analysierten Farbe ermöglicht.

So ließen sich noch eine Anzahl anderer Punkte namhaft machen, in denen die bisherige Farbenlehre die Auskunft versagt oder eine falsche Auskunft gibt. Es sei die Frage erwähnt, warum im Spektrum auch bei beliebiger Variation der Helligkeit und bei beliebiger Mischung niemals braune, olivgrüne und ähnliche Farbtöne erhalten werden können, auch wenn man das Verhältnis zwischen monochromatischem und weißem Licht in allen beliebigen Abstufungen variiert. Ferner ist auf das Fehlen

eines Prinzips hinzuweisen, nach welchem man die stetige in sich zurücklaufende Reihe der Farbtöne einteilen und beziffern kann, um jedem von ihnen im Farbenkreise seinen ganz bestimmten, von subjektiver Willkür oder der Aufbewahrung irgendeines willkürlich gewählten Musters unabhängigen Ort anzuweisen.

Alle diese Tatsachen lassen erkennen, daß ein grundsätzlicher Aufbau der Farbenlehre von ihren Elementen aus notwendig ist, um dieses Gebiet der exakten Wissenschaft anzugliedern. Ein Bedürfnis nach einem solchen Fortschritt ist heute besonders dringend, wo beispielsweise eine ausgedehnte und weltbeherrschende Industrie der künstlichen Farbstoffe besteht, welche sich bis jetzt außerstande gesehen hat, die Haupteigenschaften ihrer Produkte, nämlich ihre Farbe, nach Zahl und Maß zu kennzeichnen. Gegenwärtig kann eine bestimmte Farbe nicht anders als durch die Vorlage eines physischen Objekts, welches diese Farbe besitzt, definiert werden und der Möglichkeit, daß diese Vorlage im Laufe der Zeit in irgendeinem Sinne Änderungen erleiden kann, steht man praktisch hilflos gegenüber.

Es besteht also die Aufgabe, nicht nur die eben aufgezeichneten Lücken und Unzulänglichkeiten auszufüllen und zu beseitigen, sondern auch die fehlenden Grundlagen so weit zu beschaffen, daß man die Farbe ebenso mit Zahl und Maß eindeutig bezeichnen und umgekehrt eine bestimmte vorgeschriebene Farbe ebenso zweifellos und ohne Zuhilfenahme einer aufbewahrten Norm herstellen kann, wie dies beispielsweise mit Temperaturen, elektrischen Spannungen oder Volumen möglich ist. Es muß mit anderen Worten als Ziel einer wissenschaftlichen Farbenlehre der Anschluß des Systems der Farben an das sogenannte absolute Maßsystem gefordert werden. Nachstehend will ich zu zeigen versuchen, daß diese Forderungen gegenwärtig sich tatsächlich erfüllen lassen.

Bezugsfreie und bezogene Farben.

Wenn man von einem Spektroskop gewöhnlicher Konstruktion die Okularlinse entfernt und an die Stelle des Fadenkreuzes einen Spalt bringt, so erblickt man beim Hindurchschauen durch diesen die vordere Fläche des Prismas von einer homogenen Farbe erfüllt, welche von der Orientierung der beiden Spalten abhängt und durch Bewegung des Fernrohrs oder des Prismas durch das ganze Spektrum geführt werden kann. Stellt man nun das Spektroskop auf eine bestimmte Farbe, z. B. das reine Zitronengelb ein und ändert deren Helligkeit durch Öffnen und Schließen des Objektivspaltes in beliebigen Grenzen, so erscheint das Gesichtsfeld immer rein gelb. Nur bei sehr heller Beleuchtung geht dieses Gelb infolge von Blendung des Auges in Weiß über. Beim starken Verdunkeln andererseits wird das Gelb mit dem Undeutlicherwerden des Gesichtsfeldes schließlich gleichfalls farblos, da man es infolge seiner Lichtschwäche nicht mehr mit der Sehgrube, sondern mit peripheren Gebieten der Netzhaut beobachtet, welche viel lichtempfindlicher sind, dagegen aber keinen Farbenunterschied vermitteln. Von der charakteristischen Verfärbung des Gelb durch Zusatz von Schwarz, wie man sie sich beispielsweise veranschaulichen kann, wenn man die Farben einer gelben und einer schwarzen Scheibe auf der Drehscheibe zur Vermischung bringt, läßt sich im Spektralapparat keine Spur erkennen; es fehlen durchaus jene gelbgrauen oder olivgrünen Farben, welche durch die optische Mischung von Schwarz und Gelb erzeugbar sind und dem Ungeübten ein so überraschendes Schauspiel der unbunten Abwandlung einer reinen Farbe bieten. Ähnliche Erscheinungen kann man sich auf noch einfachere Weise verschaffen, wenn man ein innen geschwärztes Rohr am äußeren Ende mit einer Mattglasscheibe oder einem Verschluß von paraffiniertem Papier versieht und das so entstehende helle Gebiet in einem im übrigen dunklen Gesichtsfelde durch die Anbringung tiefgefärbter Gelatinefolien mit irgendeiner deutlichen Farbe ausstattet. Wendet man dieses Rohr nacheinander zum Fenster und zu den dunkelsten Ecken des Zimmers, so kann man die objektive Stärke des einfallenden Lichtes innerhalb weitester Grenzen ändern. Das Licht selbst ändert hierbei durchaus nicht seine Farbe, Ist diese rot, so bleibt sie rot bis zu den letzten Grenzen der Erkennbarkeit und wird nicht etwa braun, wie die rote Farbe beim optischen Vermischen mit Schwarz auf der Drehscheibe. Ebensowenig ist es möglich in einem solchen Apparat (ohne farbiges Lichtfilter) Grau zu sehen, wenn man die Lichtstärke ändert. Man sieht entweder ein helles Gesichtsfeld oder man sieht nichts, man empfindet aber niemals etwa bei einer mittleren Beleuchtung dieses Gesichtsfeld als grau und als weiß bei stärkerer Beleuchtung.

Haben wir hier einen Fall, wo eine Farbe trotz weitgehender Änderungen der objektiven Lichtstärke sich nicht ändert, so können wir andererseits sehr leicht einen Fall verwirklichen, in welchem das Aussehen einer Farbe trotz unveränderter objektiver Lichtstärke innerhalb weitester Grenzen variiert. Der Versuch rührt von E. Hering her und muß als ein Grundversuch der psychologischen Farbenlehre bezeichnet werden. Ich rate deshalb jeden Leser

auf das dringendste, ihn alsbald selbst anzustellen. Es gehört dazu nichts als ein Stück recht lebhaft gefärbtes Papier (am besten zitronengelbes) und ein größeres Stück weißes undurchsichtiges Papier, in welches man eine mittlere Öffnung von etwa 2 cm gemacht hat. Man legt das gelbe Papier horizontal auf den Tisch nach dem Licht zu und hält das weiße Papier in 10 bis 20 cm Entfernung so über dem gelben, daß es dieses für das Auge vollständig zudeckt und die gelbe Farbe nur in der Öffnung des weißen Papiers sichtbar wird. Dieses Gelb erscheint normal, d. h. ebenso wie bei der unmittelbaren Betrachtung des gelben Papiers, wenn das weiße Papier horizontal gehalten wird. Dreht man es nun so zum Licht, daß es immer heller beleuchtet wird, wobei man immer darauf achtet, daß kein Schatten auf das unterliegende gelbe Papier fällt, so zeigt sich das Gelb in der Öffnung veränderlich. Es wird zunehmend grauer und seine Farbe kann, wenn die Verhältnisse gut gewählt sind, d. h. die Beleuchtung des weißen Papiers in der günstigsten Lage erheblich stärker als die gelbe ist, bis zu einem schwärzlichen Olivgrün gehen. Dreht man das weiße Papier umgekehrt so zurück, daß seine Oberfläche weniger beleuchtet wird, so nimmt das Gelb zunächst sein normales Aussehen an, verwandelt sich aber dann beim weiteren Beschatten des weißen Papiers in ein leuchtendes Hellgelb, wie man es durch Pigmente überhaupt nicht herstellen kann.

Hier ist also Beschaffenheit und Intensität der Lichtstrahlen, die von dem gelben Papier ins Auge gelangen, während des ganzen Versuchs unverändert geblieben und nur der Rahmen, innerhalb dessen das Gelb erscheint, hat eine Änderung seiner Helligkeit erfahren. Trotzdem hat sich die Farbe dieses objektiv unverändert gebliebenen Gelb innerhalb weitester Grenzen geändert und hat insbesondere alle diejenigen Veränderungen erkennen lassen, die man durch die Vermischung eben desselben Gelb mit Schwarz auf der Drehscheibe zur Erscheinung bringen kann.

Während also die erste Versuchsreihe zeigte, daß trotz weitgehender Änderung in der objektiven Helligkeit einer Farbe ihr Farbencharakter unverändert bleiben kann, zeigt der zweite Versuch, daß trotz unveränderlicher objektiver Helligkeit und Zusammensetzung einer Lichtmasse deren Farbe doch innerhalb weitester Grenzen variieren kann.

Es liegt hier also ein tiefgreifendes Problem vor, das unbedingt eine Lösung verlangt. Diese Lösung liegt darin, daß es sich hier um zwei wesentlich verschiedene Klassen von Farben handelt, von denen die eine bezugsfreie, die andere bezogene Farben genannt werden sollen.

Die bezugsfreien Farben sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen ein großes Gebiet von Farben fehlt, die wir sonst genau kennen; nämlich alle braunen, olivgrünen usw., kurz alle trüben Farben. Dies rührt daher, daß die bezugsfreien Farben nur zwei Variable haben, nämlich einerseits den Farbton und andererseits den Anteil Weiß, der natürlich auch Null sein kann. Bringt man beispielsweise an dem Fernrohr des Spektroskops, in welchem sich gewöhnlich die Wellenlängenskala befindet, eine Mattscheibe und eine Vorrichtung zu beliebig veränderlicher Beleuchtung derselben an, so kann man dem homogenen Licht, das der Spektralapparat bei der oben beschriebenen Anordnung zu beobachten gestattet, beliebige Anteile weißen Lichtes zumischen. Hiermit ist die Variationsmöglichkeit der bezugsfreien Farben, wie sie im Spektralapparat erscheinen, vollständig erschöpft. Man kann einen gegebenen Farbton nur durch Zumischung von Weiß immer blasser machen, bis er seinen bunten Charakter ganz verloren hat; man kann ihn aber nicht durch Verminderung seiner absoluten Helligkeit unter zunehmendem Verlust seiner Farbe stetig in Schwarz überführen, wie dies etwa auf der Drehscheibe durch Zumischung von Schwarz möglich ist.

Der entscheidende Umstand, welcher die bezugsfreien Farben charakterisiert, beruht darauf, daß jeweils nur eine einzelne Farbe in einem übrigens lichtlosen Gesichtsfelde erscheint. Die beobachtete Farbe steht somit für sich allein da und es besteht keine Möglichkeit, sie mit anderen gleichzeitig empfundenen Farben zu vergleichen. Jedesmal, wo man solche Bedingungen herstellt, die aus bestimmten Gründen beispielsweise in fast allen optischen Apparaten realisiert sind oder leicht realisiert werden können, hat man es mit einer Farbe aus dem System der bezugsfreien Farben zu tun, deren Variable nur der Farbton und das Weißverhältnis sind.

Daß die absolute Intensität keinen Einfluß auf das Aussehen der Farbe unter diesen Umständen ausübt, rührt daher, daß das Auge aus biologischen Gründen mit Vorrichtungen ausgestattet ist, die den Einfluß der objektiven Intensität nach Möglichkeit kompensieren. Es sind dies namentlich die Beweglichkeit der Iris und die Änderung der Lichtempfindlichkeit in der Netzhaut. Daher verschwindet (abgesehen von extremen Fällen) die Variable der objektiven Lichtstärke für die Empfindung, d. h. für dasjenige, was wir Farbe nennen und es bleibt, wie Helmholtz seinerzeit bewiesen hat, nur noch die Variationsmöglichkeit nach dem Farbton

und nach dem Weißverhältnis übrig. Denn er hat gezeigt, daß die Farbe jeder beliebigen Mischung von Wellenlängen identisch nachgeahmt werden kann durch eine Mischung aus einer homogenen Lichtart mit weißem Licht mit Ausnahme des purpurnen Gebietes, wo zwei Arten homogenen Lichtes nötig sind.

Da nun die meisten Forscher, welche über die wissenschaftliche Farbenlehre gearbeitet hatten, sich spektraler und ähnlicher Farben aus dem bezugsfreien Gebiet bedient haben, so ist die Folge gewesen, daß man die Farbenlehre vorwiegend von dieser sehr besonderen Seite her und deshalb in hohem Maße unvollständig ausgebildet hat. Weder Helmholtz noch einer seiner Nachfolger hat, soweit meine Kenntnisse der Literatur reichen, jemals auf den grundsätzlichen Unterschied der bezugsfreien Farben von den gewöhnlichen bezogenen und auf das Verschwinden einer der drei Veränderlichen, die bei letzteren auftreten, hingewiesen. Die Klarheit über diesen Punkt ist aber von wesentlicher Bedeutung für die weitere Entwicklung der Farbenlehre.

Das Wesen der bezogenen Farben geht umgekehrt aus dem Versuch von Hering mit eindringlichster Deutlichkeit hervor. Hier bewirkt derselbe objektive Reiz dadurch, daß in dem veränderlichen Rahmen des weißen Papiers die gelbe unveränderliche Fläche erscheint, daß die zugehörige Farbenerscheinung, d. h. das zugehörige psychologische Produkt, eine ganze Reihe von Abänderungen erfährt, wie man sie unter anderen Bedingungen nur durch objektive Änderung der Lichtart hervorrufen kann.

Die Verhältnisse, welche unseren Empfindungen der bezogenen Farben zugrunde liegen, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Wir erkennen die Gegenstände der Außenwelt ganz vorwiegend durch das Licht, welches sie von ihrer Oberfläche zurückwerfen. Sehen wir von regelmäßiger Reflexion oder Spiegelung ab, welche auf dem Farbengebiet zu den Sondererscheinungen des Glanzes führen und setzen die fragliche Oberfläche, als vollständig matt, also von jeder orientierten Reflexion frei, voraus, so liegen zunächst zwei ideale Grenzfälle vor. Nämlich der, in welchem alles auffallende Licht reflektiert und der, wo gar kein Licht reflektiert wird. Eine Oberfläche der ersten Art ist eine ideal weiße, eine der zweiten eine ideal schwarze Fläche. Beide Ideale sind wie immer technisch unerreichbar; man kann sich ihnen aber zunehmend nähern. Was die ideal weiße Fläche anlangt, so fehlt es charakteristischerweise völlig an Untersuchungen, die mit modernen Hilfsmitteln an einer gut definierten weißen Fläche den Absolutwert der Weiße oder die Albedo angeben. Auf Grund meiner Untersuchungen an weißen matten Flächen aller Art halte ich mich zu der Annahme für berechtigt, daß ein Aufstrich von gefälltem Bariumsulfat, der auch von anderen Seiten als Normalweiß empfohlen ist, eine Albedo besitzt, die von der Einheit nicht mehr als einige Prozent abweichen kann. Eine solche Schicht ist nämlich etwas weißer als irgendeine andere, die ich habe herstellen können, während doch die anderen weißen Schichten sich dieser vielfach so weit nähern, daß die Konvergenz auf einen Endpunkt unverkennbar ist. Es muß als eine dringende Aufgabe eines mit den nötigen Hilfsmitteln ausgestatteten Laboratoriums, in erster Linie unserer Physikalisch-technischen Reichsanstalt, bezeichnet werden, die absolute Bestimmung der Albedo irgendeiner reproduzierbaren Oberfläche vorzunehmen, damit es hernach möglich wird, durch einfache photometrische Messungen jedes beliebige Weiß auf die Norm der absoluten Einheit zu beziehen.

Viel besser orientiert sind wir über das andere Ende der Reihe Weiß—Grau—Schwarz, da die entsprechenden Untersuchungen übereinstimmend ergeben haben, daß auch unsere schwärzesten Pigmente noch einige Prozente Weiß reflektieren. Ein ideales Schwarz kann indessen technisch durch eine kleine Öffnung in einem innen geschwärzten Kasten realisiert werden und bester schwarzer Seidensammet zeigt eine Remission (mit diesem Ausdruck soll nach Hering allgemein die Zurückwerfung des Lichtes von einer matten Oberfläche bezeichnet werden), die nur einen Bruchteil eines Prozentes (bei einem mir vorliegenden Material 0,2 Proz.) ausmacht.

Zwischen den Grenzen Weiß und Schwarz liegt nun die Remission aller anderen Körperoberflächen. Zum Teil remittieren sie das darauffallende Licht, ohne eine besondere Strahlenart zu bevorzugen oder zu benachteiligen und sehen dann gemäß dem Bruchteil des remittierten Lichtes hell- oder dunkelgrau aus. Zum anderen, viel häufigeren Teil findet eine selektive Remission statt, die in letzter Instanz auf einer Absorption in den Oberflächenschichten beruht und die Farben der Gegenstände erscheinen demgemäß bunt.

Diese Remissionsverhältnisse sind nun höchst charakteristische Konstanten der uns umgebenden Körpers. Da für die Lichtenergie innerhalb der von uns herstellbaren Umfänge keine „Sättigung" irgendwelcher Art stattfindet, da also insbesondere die Intensität des remittierten Lichtes innerhalb weitester Grenzen streng proportional der Intensität des auffallenden Lichtes ist, so erklärt es sich, daß die biologische Anpassung unseres Sehorgans nicht für die Auf-

fassung absoluter Helligkeiten erfolgt ist, die ja beständig wechseln und daher nichts Charakteristisches für die Unterscheidung der Außenwelt beibringen, sondern für die Auffassung von Verschiedenheiten der Remission, welche ganz unabhängig von der Lichtintensität sind und allein ein Wiedererkennen bestimmter Objekte sichern.

Die bezogenen Farben sind nun durch die Remissionsgrößen bedingt und werden in solchem Sinne beurteilt. Das Gelb in der Öffnung des weißen Schirmes in dem oben beschriebenen Fundamentalversuch wird unwillkürlich aufgefaßt als ein Teil der weißen Fläche und die in dieser Öffnung herrschenden Lichtverhältnisse werden beurteilt, als würden sie bewirkt durch eine in der Öffnung befindliche remittierende Fläche, d. h. sie werden auf die Remission bezogen, welche der Umgebung des Fleckes, dem weißen Papier, eigen ist. Remittiert diese Fläche verhältnismäßig viel mehr Licht, als von dem gelben Papier kommt, so macht die Öffnung den Eindruck, als wäre sie mit einem gelben Pigment bedeckt, welches daneben noch einen entsprechenden Betrag allgemeiner Absorption ausübt, also einen Anteil Schwarz enthält, der um so größer wird, je größer die Helligkeit des Rahmens im Verhältnis zu der des eingeschlossenen Gebietes gemacht wird. Gelangt umgekehrt von seiten der gelben Fläche relativ mehr Licht durch die Öffnung als bei den Beleuchtungsverhältnissen der weißen Umgebung auch von dem hellsten gelben Pigment remittiert werden würde, so empfinden wir den Fleck als leuchtend, weil wir nur in selbstleuchtenden Körpern solche Oberflächen kennen, die eine größere Lichtmenge remittieren als eine Fläche von der Albedo Eins. Hier erweist sich also unsere Empfindung der Farbe (denn es handelt sich, wie besonders betont werden soll, hier keineswegs um ein bewußtes Urteil, sondern um eine automatisch funktionierende Zuordnung) als bedingt durch bestimmte Remissionsverhältnisse. Die Kennzeichnung dieser Remissionsverhältnisse erscheint somit im Gebiet der bezogenen Farben als die fundamentale Aufgabe der Farbenlehre. Denn von diesen Remissionsverhältnissen sind nicht nur die charakteristischen Eigenschaften der Farbstoffe abhängig, sondern unsere ganze Beurteilung der optischen Erscheinungswelt wird maßgebend durch sie bestimmt.

In dem Gebiet der bezogenen Farben treten nun die charakteristischen drei Veränderlichen der Farbengesamtheit auf. Hier können wir olivgrüne, braune und andere bei den bezugsfreien Farben fehlende Farben in all ihrer Mannigfaltigkeit studieren. Wir erkennen, daß dieses daran liegt, daß nunmehr das Schwarz, welches bei den bezugsfreien Farben fehlt, als selbständige Empfindung oder psychische Tatsache seine Rolle zu spielen beginnt. Demgemäß gewinnen wir zunächst durch seine Mischung mit Weiß die verschiedenen Arten des Grau, und weiterhin durch seine Mischung mit den reinen und den nach Weiß abgewandelten Farben die ganze Mannigfaltigkeit der dunklen und der trüben Farben, die sich im allgemeinen als Mischungen einer reinen Farbe mit irgendeinem Grau definieren lassen. Hierdurch wird ferner ersichtlich, daß die bezugsfreien Farben sich als ein Sonderfall der bezogenen erweisen, der durch den Verlust einer der Veränderlichen, nämlich des Schwarz, entsteht. Die Untersuchung der letzteren wird uns somit alles sagen, was über jene zu wissen erforderlich ist.

Eine graphische Darstellung, die wir später allgemein benutzen werden, wird den grundlegenden Unterschied, um den es sich hier handelt, noch klarer machen. Ist der Farbton gegeben, so stellt

Fig. 1.

die Linie $w—r$ (Fig. 1) wo in w Weiß und in r die reine Farbe liegt, die Gesamtheit aller möglich Abkömmlinge eines gegebenen Farbtons dar, solange wir uns im Gebiete der bezugsfreien Farben bewegen. Jede Farbe entspricht quantitativ einer linearen Gleichung $w + r = 1$, wenn w der Bruchteil Weiß und r der Bruchteil reiner Farbe bedeutet. Geben wir der Strecke die Einheit der Länge, so können sämtliche denkbaren Verhältnisse zwischen diesen beiden Veränderlichen durch einen bestimmten Punkt der Geraden dargestellt werden.

Im Falle der bezogenen Farben tritt als dritte unabhängige Komponente das Schwarz hinzu und statt der geraden Linie von der Längeneinheit müssen wir zur Veranschaulichung ein gleichseitiges Dreieck $w\ r\ s$ mit der Seite

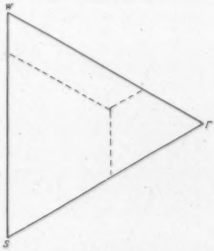


Fig. 2.

Eins verwenden (Fig. 2). In einem solchen hat bekanntlich jeder Punkt die Eigenschaft, daß die drei Parallelen zu den Seiten, die man von ihm aus ziehen kann, die Seitenlänge, also hier die Einheit zur Summe haben. Da für jede bezogene Farbe, wie später noch ausführlich gezeigt werden soll, die entsprechende allgemeine Gleichung $w + s + r = 1$ gilt, so kann jede beliebige Zusammenstellung dieser drei Komponenten durch einen Punkt des Dreiecks veranschaulicht werden und die Dreiecksfläche stellt die Gesamtheit aller möglichen Kombinationen der drei Bestandteile der bezogenen Farben dar. Vergleichen wir das Dreieck $w\,r\,s$ mit der Geraden $w\,r$, so wird das Verhältnis der bezugsfreien Farben zu den bezogenen unmittelbar klar: die ersten reduzieren sich auf die eine Grenzlinie wr des Farbendreiecks $w\,r\,s$ oder der isochromen Fläche, welche die Mannigfaltigkeit der zweiten veranschaulicht.

Gesättigte Farben.

In den einleitenden Bemerkungen wurde bereits darauf hingewiesen, daß zwischen homogenem Licht und gesättigten Farben ein sehr großer Unterschied besteht. Die später darzustellenden Untersuchungen über die Reinheit gegebener Aufstriche haben zu dem Resultat geführt, daß eine Reinheit bis zu 80—90 Proz. in dem Gebiet der warmen Farben erreichbar ist. Untersucht man nun derartige Aufstriche spektroskopisch, so überzeugt man sich, daß das Verhalten, wie es oben beim Gelb geschildert worden war, bei allen anderen Farben gleichfalls zutrifft. Jedesmal enthält die reine oder gesättigte Farbe neben der charakteristischen Wellenlänge eine große Anzahl beiderseits benachbarter Lichtarten.

Die Grenzen dieser begleitenden Lichtarten zeigen eine bestimmte und sehr bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit. Diese macht sich am gesättigten Gelb am allerleichtesten bemerkbar. Die Wellenarten, welche zu dieser Farbe zusammentreten, erstrecken sich vom äußersten Rot bis zu einem bestimmten Blaugrün, das etwa durch die Wellenlänge 490 gekennzeichnet ist. Nun ist dieses Blaugrün gerade die Ergänzungsfarbe des äußersten Rot und dieses Zusammentreffen führt auf einen allgemeinen Satz, der sich bei der Untersuchung anderer gesättigter Farben durchgängig bestätigt. Er lautet dahin, daß zu einer gesättigten Farbe sämtliche Farben zusammenwirken müssen, welche innerhalb einer Hälfte des Farbenkreises liegen. Die Gesamtheit dieser Farben wird also jeweils durch ein Paar Ergänzungsfarben begrenzt und die resultierende gesättigte Farbe ist diejenige, welche in dem rationell eingeteilten Farbenkreise symmetrisch zu den beiden diagonal sich gegenüberliegenden Grenzpunkten, also in einem rechten Winkel zu dem entsprechenden Durchmesser liegt. Nennen wir die Gesamtheit aller Farben eines rationellen Farbenkreises, die durch ein Paar von Gegen- oder Ergänzungsfarben begrenzt werden, ein Farbenhalb, so kann man sagen, daß zur Bildung einer gesättigten Farbe jedesmal sämtliche Farben eines Farbenhalbes zusammenwirken müssen.

Daß dies zutrifft, davon kann man sich überzeugen, wenn man reingefärbte Farbfilter auf ihre Absorption untersucht, nachdem man sie derart eingestellt hat, daß ihre Färbung mit der eines reinsten Aufstriches von gleichem Farbton so nahe wie möglich übereinkommt. Ich habe eine ganze Anzahl derartiger Fälle untersucht und regelmäßig eine Bestätigung des allgemeinen Gesetzes gefunden. Allerdings ist diese Bestätigung ziemlich unvollkommen, da die Absorptionsgrenzen der Farbstoffe, auch der reinstgefärbten, keine scharfen sind, sondern ziemlich weite Übergänge zeigen. Es ist daher nicht leicht, die Grenze der Absorption im Spektroskop an der Wellenlängeskala zu bestimmen und ein gewisses Maß willkürlicher Einschätzung bleibt jedesmal übrig. Daher ist es gegenwärtig noch nicht möglich, für den ausgesprochenen Satz unbedingte Geltung in Anspruch zu nehmen oder die Grenzen seiner Gültigkeit genau zu bestimmen. Daß er im allgemeinen die Tatsachen richtig darstellt, scheint mir aber außer Zweifel zu stehen.

Man erkennt alsbald, wie durch diese neue Definition der gesättigten Farben die früher erwähnten Schwierigkeiten beseitigt sind. Gesättigtes Gelb besteht aus Rot, Orange, Gelb, Gelbgrün und Blaugrün. Es remittiert also sämtliche hellsten Teile des Spektrums und absorbiert nur die dunklen Gebiete des Blau und Violett. Daher erklärt es sich, daß seine spezifische Helligkeit nur um ein Zehntel geringer ist, als die des reinen Weiß. Auch ergibt die spektrale Analyse der schönsten und reinsten Körperfarben, die wir in der Natur auf Blumenblättern und Schmetterlingsflügeln finden, stets das Vorhandensein breiter zusammenhängender remittierter Gebiete, denen ähnliche breite Gebiete der Absorption gegenüberstehen und niemals auch nur die geringste Andeutung eines eng zusammengezogenen linienhaften Spektrums, wie es auftreten müßte, wenn die übliche Identifizierung der gesättigten Farben mit den homogenen auch nur annähernd richtig wäre. Die naheliegende Einwendung, daß ein Farbenhalb deshalb keine gesättigte Farbe ergeben könne,

weil es zum Teil komplementäre Farben enthält, also durch deren Zusammenwirkung notwendig mit Weiß behaftet sein müsse, erledigt sich dadurch, daß diese komplementären Farben am Ende des Farbenhalbes definitionsgemäß nur einen unendlich kleinen Teil der Gesamtwirkung ausmachen.

Im übrigen kennzeichnet auch hier wieder die Definition einen idealen Grenzfall, dem sich die Wirklichkeit zwar annähern kann, den sie aber niemals erreicht. Bei den Körperfarben ist hierfür maßgebend, daß die Grenzen zwischen remittiertem und absorbiertem Gebiete niemals scharf sind, sondern durch abgestufte Übergänge ineinander verschwimmen. Deshalb enthält notwendig die resultierende Farbe entweder Schwarz, wenn nämlich die Grenzen innerhalb des remittierten Teils verlaufen, also das absorbierte Gebiet über das entgegengesetzte Farbenhalb hinausgeht, oder Weiß, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Liegen die Grenzen so, daß die Abstufungen zum Teile in das eine und das andere Farbenhalb fallen, so finden beide Arten der Verunreinigung gleichzeitig statt; die Farbe enthält sowohl Schwarz wie Weiß, d. h. Grau. Dies ist bei weitem der häufigste Fall.

Die Frage, auf welche Weise im Spektrum die Grenzen der Farbenhalbe verlaufen, hängt auf das unmittelbarste zusammen mit der Frage, wie dem rationell eingeteilten Farbenkreis die Wellenlängen des Spektrums zugeordnet sind und wird dort im Zusammenhange erörtert werden.

Auf einen anderen Punkt muß indessen bereits hier eingegangen werden, da er eine Anzahl psychophysischer Besonderheiten der Farben bedingt. Es ist dies die Lücke, welche das Spektrum im Vergleich zum Farbenkreise aufweist. Ordnet man letzteren, wie ich das vorgeschlagen habe und weiter unten begründen werde, in 100 Stufen dergestalt, daß man die hellste Farbe, Zitronengelb mit Null bezeichnet und von dort über Orange, Rot, Purpur, Violett, Blau und Grün zum Gelb zurückkehrt, so liegt in dem Farbenkreise das Zinnoberrot, welches mit dem Spektralrot übereinkommt, bei dem Punkt 25. Der Punkt 50 wird von einem etwas rötlichen Ultramarinblau gebildet und beim Punkt 75 liegt das Blaugrün mit der Wellenlänge 490, welches die Ergänzungsfarbe des spektralen Rotes ist. Bei dieser Anordnung legt sich das Spektrum, wenn man mit den kürzesten Wellen im Violett beginnt, etwa im Punkte 46 an den Farbenkreis, verläuft von dort ab mit Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange und Rot über 99 zu 0 und weiterhin bis 25 (Fig. 3). Zwischen 25 und 46, also über ein Gebiet von über $^1/_5$ des Kreises, gibt es keine homogene Spektralfarbe, die den entsprechenden Farben des Farbenkreises gleich aussieht, sondern man kann die zugehörigen Farben nur durch Vermischung von Rot mit Violett und Blau erreichen. In Fig. 3 stellt die starke Linie den spektralen Teil des Farbenkreises dar.

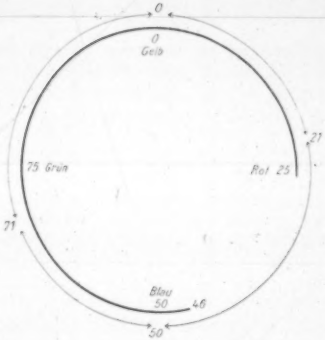


Fig. 3.

Demgemäß sind nur verhältnismäßig wenig gesättigte Farben (im grünen Gebiet) von der Beschaffenheit, daß ihr Farbenhalb vollständig durch Spektralfarben ausgefüllt ist. Solche Farben liegen zwischen 71 und 100 oder 0, da die zugehörigen Farbenhalbe durch die Paare 46—96 und 25—75 begrenzt sind. Alle anderen Farbenhalbe enthalten die spektrale Lücke des Farbenkreises entweder teilweise oder vollständig und geben dementsprechend bei der spektralen Analyse kürzere Bänder.

Diese Unvollkommenheiten der Farbenhalbe sind von zweierlei Art. Entweder fehlt an einem Ende des Farbenhalbes ein längeres oder kürzeres Stück, dessen Umfang im äußersten Falle 21 Einheiten, also mehr als $^2/_5$ des ganzen Farbenhalbes betragen kann oder aber die Lücke tritt innerhalb des Farbenhalbes ein, so daß sie dieses in zwei getrennte Stücke teilt. Diese stammen von den beiden Enden des Spektrums und weisen daher in bezug auf ihre Wellenlänge und sämtliche von dieser abhängigen Eigenschaften den größten Unterschied auf, der zwischen homogenen Lichtern überhaupt bestehen kann.

Im übrigen ist die Ordnung dieser drei Arten der Farbenhalbe folgende. Lückenfreie Farbenhalbe besitzen die grünen und gelbgrünen Farben zwischen den Nummern 71 und 100 oder 0. Eine Endlücke besitzen die gesättigten Farben zwischen 0 und 21, welches die gelben, gelbroten bis etwa zu den mennigroten sind und ferner die zwischen 50 und 71, die blauen

Farben bis zum Beginn der grünen. Bei den ersten besteht die Endlücke am roten Ende, bei den zweiten am violetten. Eine Mittellücke endlich besitzen die gesättigten Farben von 21 bis 50, d. h. die hochroten, purpurroten und violetten bis zum Beginn des Blau. Auf dieser Besonderheit beruht höchstwahrscheinlich der besondere psychologische Eindruck, den die roten und violetten Farben von jeher, namentlich auf primitivere Menschen gemacht haben und von dem beispielsweise die russische Sprache ein Zeugnis in dem Umstande aufbewahrt, daß die Wörter für Rot und schön identisch sind. Die Fig. 3 gestattet die eben beschriebenen Verhältnisse nebeneinander zu übersehen.

Bemerkenswerterweise liegen in dem Gebiete mit vollständigem Farbenhalb die meisten Farben, bei denen es noch nicht möglich gewesen ist, Aufstriche von hoher Sättigung herzustellen. Im Blau, Blaugrün und Grün bis in ein helles Gelbgrün hinein ist bisher keine größere Reinheit als ungefähr 0,6 erreichbar gewesen. Es handelt sich hier vermutlich um eine prinzipielle Erscheinung, die mit der von Helmholtz und seinen Schülern konstatierten Tatsache zusammenhängt, daß im grünen Gebiete bereits bei der Vermischung ziemlich nahe beieinanderstehender Wellenarten die resultierende Mischfarbe gegenüber der homogenen Farbe weißlich aussieht, also nicht mehr rein ist. Dementsprechend wird in diesem Gebiete vermutlich künftig die theoretische Definition der reinen und der gesättigten Farbe zu trennen sein. Doch will ich mich hier mit dieser Andeutung begnügen, da systematische Forschungen über diese Frage noch nicht aufgenommen werden konnten.

Die Reinheit.

Wie man sieht, hängen alle weiteren Fortschritte in der Farbenlehre von der Lösung des Problems ab, wie man die Reinheit einer gegebenen Körperfarbe bestimmt. Der Stand der Frage bis in die jüngste Zeit ist bereits geschildert worden und es kann somit alsbald zu der Lösung übergegangen werden, wie sie gegenwärtig vorliegt. Denkt man sich ein objektives Spektrum von einiger Ausdehnung entworfen und einen Aufstrich, den wir uns gesättigt vorstellen, durch dieses Spektrum geführt, so kann er nach wohlbekannten Gesetzen überall nur die Farbe des Lichtes zeigen, welches gerade auf ihn fällt. Hat er nun die Eigenschaft, die eine Hälfte des Farbenkreises zu absorbieren, die andere Hälfte zu remittieren (wobei gebührende Rücksicht auf die „Lücke“ zu nehmen ist), so wird er folgendes Verhalten zeigen. In den Teilen des Spektrums, die er remittiert, wird seine Remission vollständig sein, d. h. er wird so hell erscheinen, wie ein ideal weißer Aufstrich. In den Teilen, die er absorbiert, wird umgekehrt die Absorption vollständig sein, d. h. er wird dort vollkommen schwarz erscheinen.

Ein wirklicher Aufstrich wird von diesem theoretischen Ideal in folgenden Punkten abweichen. Zunächst wird seine Remission in dem remittierenden Gebiete nicht vollständig sein und er wird demgemäß nicht ganz so weiß wie ein ideal weißer Körper erscheinen, sondern etwas dunkler. Durch den Vergleich gemessener grauer Aufstriche mit dem fraglichen farbigen kann man quantitativ bestimmen, wie groß der nicht remittierte Betrag des Lichtes ist, wieviel Schwarz also die Farbe enthält.

Ebenso wird die Absorption in dem anderen Gebiet nicht vollständig sein und der Aufstrich wird noch einen Teil des auffallenden Lichtes remittieren. Wiederum kann man durch den Vergleich mit einem geeigneten Grau, das durch das gleiche Licht beleuchtet wird, feststellen, wie groß der remittierte Anteil ist. Dieser läßt erkennen, wieviel Weiß der Aufstrich enthält.

Summiert man nun diese beiden Anteile, den schwarzen und den weißen, und zieht die Summe von der Einheit ab, so bleibt die Menge bunten Lichtes übrig, die der Aufstrich remittiert. Damit ist ein absolutes Maß der Reinheit des Aufstriches gefunden.

Es ist zu beachten, daß der bereits erwähnte Umstand, daß die Grenzen des remittierenden und absorbierenden Gebietes nicht scharf sind, hier die Folge hat, daß auch die Grenzen der Spektralgebiete, wo der Aufstrich hell und wo er schwarz erscheint, durch stetige, wenn auch mehr oder oder weniger schnelle Übergänge verbunden sind. Die Spektralgebiete also, in denen eine Messung des remittierenden und des absorbierenden Anteiles vorgenommen werden kann, werden dadurch verengt.

Ferner wird bei der Analyse vorausgesetzt, daß der Bruchteil des absorbierten oder remittierten Lichtes über das übriggebliebene Gebiet praktisch konstant ist. Diese anscheinend weitgehende Forderung ist tatsächlich in den meisten Fällen genügend erfüllt. Denn die Absorptions- oder Remissionsverhältnisse der festen Körper zeigen sich bekanntlich gegenüber denen in Gasen, aber auch gegenüber denen in Flüssigkeiten stark verwischt und ihre hohen bzw. niedrigen Werte verlaufen demgemäß sehr gleichförmig über weite Gebiete. Auch kann man sich durch unmittelbare Helligkeitsbestimmungen an verschiedenen Stellen des Spektrums,

die in das eine oder in das andere Gebiet fallen, davon überzeugen, ob und in welchem Maße jene grundlegende Voraussetzung erfüllt ist. Man findet in den häufigsten Fällen eine vollständig genügende Annäherung.

Wie man sieht, kommt dieses Verfahren der Reinheitsbestimmung darauf hinaus, daß man zwei gewöhnliche photometrische Messungen, eine im Absorptions- und die andere im Remissionsgebiet ausführt. Hierbei dient das Auge nur, um gleiche Helligkeit innerhalb derselben Farbe zu konstatieren und es kann offenbar ohne weiteres durch jedes beliebige Radiometer ersetzt werden, das für die in Frage kommende Strahlung empfindlich ist. Spektren von verschiedenen Lichtquellen mit verschiedenen Intensitätsverhältnissen in ihren Teilen müssen dasselbe Resultat ergeben, weil jeweils immer nur homogenes Licht in Frage kommt, dessen absolute Intensität keinen Einfluß auf die vergleichende Messung hat. Diese Tatsachen führen zu dem sehr bemerkenswerten Resultat, daß die Reinheitsbestimmung nach diesem Verfahren einen absoluten Charakter hat, d. h. weder von der Natur des benutzten Lichtes, noch von der spezifischen Empfindlichkeit des Auges abhängig ist. Man muß also dieselben Reinheitswerte bei beliebiger Beleuchtung erhalten und es muß ebenso ohne Belang sein, ob die Beobachtungen von einem Normalsichtigen oder einem teilweise Farbenblinden ausgeführt werden. Der einzige Einfluß, den diese Verschiedenheiten haben, ist der einer größeren oder geringeren Empfindlichkeit in dem betreffenden Gebiete, also einer geringeren oder größeren Fehlergrenze. Von der Richtigkeit eines Teils dieser Schlußfolgerungen, nämlich der Unabhängigkeit von der Natur des Lichtes, habe ich mich überzeugen können; für die Prüfung des anderen Teils fehlten mir die Voraussetzungen. Doch ist nach der Sachlage der positive Ausfall auch eines derartigen Experiments außerhalb jedes Zweifels.

Was die praktische Ausführung derartiger Messungen betrifft, so ist es natürlich viel bequemer, an Stelle des objektiven Spektrums Farbfilter anzuwenden, welche eine subjektive Beobachtung gestatten. Ich habe mich überzeugt, daß man ohne Schwierigkeiten für den größten Teil des Farbenkreises Farbfilter von genügender Enge und Reinheit des durchgelassenen Gebietes herstellen kann, um die Analyse vorzunehmen. Nur die im Spektrum nicht vorhandenen purpurroten und rotvioletten Farben erfordern besondere Maßnahmen; die daher rührenden Schwierigkeiten sind bereits im wesentlichen überwunden. Die Messungen reduzieren sich dann auf folgende einfache Maßnahmen. Man stellt sich zunächst eine Grauleiter von photometrisch ausgemessenen neutralgrauen Aufstrichen her, in der das remittierte Licht um bestimmte Stufen sich ändert. Meine Leiter hat von 100 bis 10 Proz. Weiß Stufen von je 5 Proz., und von 10 bis 2 Proz. (dem tiefsten Schwarz, das sich mit gewöhnlichen Hilfsmitteln erreichen läßt) Stufen von 2 zu 2 Proz. Gemäß dem Fechnerschen Gesetze ist die Unterscheidung der Stufen am hellen Ende der Leiter bereits recht schwierig, während die Schritte in zunehmendem Maße größer empfunden werden, je mehr man sich dem dunklen Ende nähert. Deshalb ist auch die Differenz im letzten Teile von 5 auf 2 Einheiten verkürzt worden. Während nun das Auge durch ein passendes Lichtfilter blickt, schiebt man die Grauleiter dem zu untersuchenden Aufstrich entlang und findet auf solche Weise ohne jede Schwierigkeit dasjenige Grau, welches ebenso hell wie der Aufstrich erscheint. Nach einiger Übung wird man sogar zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stufen 5 Zwischenpunkte interpolieren, so daß eine Schätzung bis auf 1 Proz. der absoluten Helligkeit möglich ist.

Die Reinheit erscheint als eine Differenz zweier Werte, die jede einen Fehler von mindestens 1 Proz. haben kann und ist demgemäß mit einem entsprechend größeren wahrscheinlichen Fehler behaftet. Da die Unterscheidung umso schwieriger wird, je mehr man sich dem hellen Ende der Grauleiter nähert, so nimmt auch die Fehlergrenze in gleichem Sinne zu. Reinheitsbestimmungen in hellen Aufstrichen sind demgemäß von geringerer absoluter Genauigkeit als die dunklen. Dieses entspricht auch im übrigen der subjektiven Erfahrung, wonach die Unterscheidbarkeit verschieden reiner Farben im hellen Gebiet viel geringer ist als im dunklen.

Ich glaube nicht mich einer Übertreibung schuldig zu machen, wenn ich die Entdeckung der absoluten Reinheitsmessung als den wichtigsten Fortschritt ansehe, den die Farbenlehre zum Zwecke ihrer weiteren stetigen Entwicklung machen konnte und mußte. Denn es hat sich nicht nur bereits in den vorangegangenen Erörterungen gezeigt, daß die Reinheitsmessung fundamental in alle quantitativen Fragen der Farbenlehre eingreift, sondern das gleiche wird sich in noch deutlicherer Weise alsbald bei der Erörterung der rationellen Einteilung des Farbenkreises erweisen. Deshalb ist auch der weitere Schluß, der sich aus der Methodik der Reinheitsbestimmung zwingend ergibt, daß diese nämlich von allen subjektiven und zufälligen Beeinflussungen frei ist, von besonderem Werte, da

er den erzielten Zahlen eine entsprechend allgemeinere und größere Bedeutung sichert.

Ich füge hinzu, daß durch die Ausbildung der einleitend erwähnten Methode relativer Reinheitsbestimmung mit Hilfe des Prinzips der Neutralisation durch die Gegenfarbe eine unabhängige Kontrolle der absoluten Reinheitsbestimmung möglich ist. Ich habe in einer Anzahl von Fällen diese kontrollierenden Messungen vorgenommen und mich überzeugt, daß nirgendwo Widersprüche auftreten, daß also ein grundsätzlicher Denkfehler bei der Methode zur Bestimmung der absoluten Reinheit als ausgeschlossen gelten darf. Experimentelle Schwierigkeiten und entsprechende Fehler sind natürlich vorhanden; diese lassen sich aber im Entwicklungsgange der Wissenschaft zunehmend genauer ermitteln und vollständiger beseitigen.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Hans R. G. Opitz, Über das erste Problem der Dioptrik. II. Materialien zu einer kritischen Geschichte des Problems. (Programm Nr. 115 des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin.) Lex. 8. 23 Seiten mit Figuren und 1 Tafel. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1912. M. 1.—.

Der Verfasser bespricht zunächst einige Referate seiner ersten Arbeit (H. Opitz, Über das erste Problem der Dioptrik. Pr. Nr. 109. Königstädtisches Realgymn. Berlin, Weidmann 1903) und weist nach, daß auch die Gullstrandschen Arbeiten seine Ansicht stützen, daß als Bildort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes der erste Brennpunkt (sagittaler Bildpunkt) zu betrachten sei. Der zweite Teil der Arbeit gibt eine gute Übersicht über die Literatur, soweit diese nicht schon in der ersten Arbeit berücksichtigt ist. Der dritte Abschnitt gibt Betrachtungen über die Farbenzerstreuung und ihre Wahrnehmbarkeit. Ein Einfluß der Dispersion auf den scheinbaren Bildort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes ist nicht festzustellen. H. Sch.

F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels. Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. Zweiter durchgesehener Abdruck. gr. 8°. VIII u. 196 S. mit 23 Figuren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1914. Geh. M. 5.60, geb. M. 6.60.

Das Werturteil über F. Kleins und A. Sommerfelds Buch steht längst fest und bedarf keiner Korrektur mehr. Der Neudruck des ersten Heftes dieses Werkes bietet indessen Gelegenheit, den Physiker darauf aufmerksam zu machen, daß er (abgesehen von den technischen Anwendungen, die im vierten Hefte zusammengestellt sind) das für seine Zwecke Wichtigste und Brauchbarste aus der Kreiseltheorie im ersten Hefte findet. Dieses gibt neben den kinematischen Grundlagen und der Kinetik der Poinsotbewegung eine mustergültig klare Entwicklung des Impulsbegriffes, dessen überragende Bedeutung für die gesamte Mechanik mehr und mehr anerkannt wird. — Es ist kein Zweifel, daß die mannigfachsten Probleme der Physik mehr als bisher eine gründliche Kenntnis der Lehre vom Kreisel erfordern. Diese vermag von deutschen Büchern keines so bequem und einwandsfrei zu übermitteln wie das vorliegende.

Die Änderungen im Text gegenüber der ersten Auflage beschränken sich, soweit ein kurzer Vergleich zeigt, auf die Verbesserung der Figur 3 und einige literarische Hinweise. Sonst stimmen die beiden Auflagen Seite für Seite überein. R. Grammel.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Marburg Dr. Adolf Fraenkel für Mathematik, an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Gerhard Grüttner für Stereochemie anorganischer Verbindungen und Dr. Max Herrmann für Radiologie, Elektronik und Ionisation.

Ernannt: Dr. E. J. Miles zum a.o. Professor für Mathematik an der Yale-Universität in New Haven, der a.o. Professor an der Universität Zürich Dr. Paul Pfeiffer zum ord. Professor für anorganische und allgemeine Chemie an der Universität Rostock, der a.o. Professor für Chemie an der Universität Rostock Dr. Richard Stoermer zum Leiter einer selbständigen Abteilung am chemischen Institut derselben Universität (mit einen Lehrauftrag für organische Chemie), Dr. Erich Przybyllok zum Observator des Geodätischen Observatoriums bei Potsdam.

Der a.o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule München Dr. Karl T. Fischer ist seit dem 1. April 1915 in etatsmäßiger Eigenschaft als a.o. Professor an der gleichen Hochschule tätig mit dem Lehrauftrag „über Grundzüge der Physik, Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts an höheren Lehranstalten zu lesen, Spezialvorlesungen für Elektroingenieure zu halten und die physikalische Lehrmittelsammlung der technischen Hochschule zu verwalten".

Verliehen: Dem o.ö. Professor an der Universität Göttingen Dr. Hermann Th. Simon (Physik und angewandte Elektrizität) sowie den o.ö. Professoren an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Artur Schönflies (Mathematik) und Dr. Rudolf Wachsmuth (Experimentalphysik) und dem o.ö. Professor an der Universität Bonn Dr. Franz London (Mathematik) der Charakter als Geheimer Regierungsrat.

In den Ruhestand: Der o.ö. Professor der Elektrotechnik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Hofrat Dr. Johann Puluj, der College Lecturer für Logik und Mathematik am Trinity College in Cambridge (England) Hon. Bertrand Russell (wegen Zuwiderhandlung gegen die Reichsverteidigungsakte seines Amtes enthoben).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.